

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & x < -1 \\ 4 & -1 \leq x \leq 3 \\ 2x-2 & 3 < x \end{cases}$$

$$-2x+2 = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \xrightarrow{x \leq -1} x = -3 \Rightarrow y = 8$$

در بازه $[-1, -\infty)$ اکیداً نزولی است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲

$$D_{\text{gof}} = \{x : x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$D_f = (-3, +\infty), \quad D_g = (-\infty, 4]$$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow 2 + 2 \log_7^{(r+x)} \leq 4 \Rightarrow \log_7^{(r+x)} \leq 1 \Rightarrow r+x \leq 2 \Rightarrow x \leq -1$$

$$D_{\text{gof}} = (-\infty, -1] \cap (-3, +\infty) = (-3, -1] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = -4$$

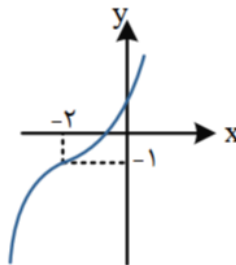
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳

$$f(x^2 + 2) < f(1 - 2x) \Rightarrow x^2 + 2 < 1 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x + 2 < 0 \Rightarrow -2 < x < -1$$

بنابراین $a = -2$ و $b = -1$ است.

$$y = (x-a)^r + b = (x+2)^r - 1$$



با توجه به شکل، نمودار تابع، از ناحیه چهارم عبور نمی کند.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴

با توجه به نمودار، مقدار a برابر ۲ است.

$$f(x) = (x-2)^r + b$$

$$f(0) = -6 \Rightarrow -8 + b = -6 \Rightarrow b = 2$$

$$\begin{aligned} x - f(x) &= x - (x-2)^r - 2 = (x-2)(1 - (x-2)^{r-1}) \\ &= (x-2)(1-x+2)(1+x-2) = (x-2)(3-x)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc} x & & 1 & 2 & 3 \\ \hline x-f(x) & + & - & + & - \end{array} \quad D = (-\infty, 1] \cup [2, 3]$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵

$$(2, 3) \in \text{fog} \Rightarrow (\text{fog})(2) = 3 \Rightarrow f(g(2)) = 3$$

$$g(2) = 3 \Rightarrow f(3) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow f(3) = 3 \\ b = 3 \Rightarrow f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

از طرفی:

$$(1, 3) \in \text{gof} \Rightarrow \text{gof}(1) = 3$$

$$\Rightarrow g(f(1)) = 3 \Rightarrow 1 \in D_f \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(1) = 2$$

$$g(2) = 3 \Rightarrow \begin{cases} f = \{(1, 2), (-1, 3), (3, 3)\} \\ g = \{(1, 3), (3, 2), (2, 3)\} \end{cases}$$

$$\text{gof} = \{(1, 3), (-1, 2), (3, 2)\} \quad \Delta = \text{جمع برد}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶

تابع $y = x$ همانی است، پس $ax^2 - f(x+b) = x$ و از آن جا $f(x+b) = ax^2 - x$ است.

$$f(x+b) = ax^2 - x \Rightarrow \begin{cases} x = -b \Rightarrow f(\circ) = \circ = ab^2 + b \\ x = 1-b \Rightarrow f(1) = \circ = a(1-b)^2 - (1-b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \circ = ab^2 + b \quad (1) \\ \circ = (1-b)(a - ab - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \xrightarrow{(1)} a = \circ \checkmark \Rightarrow a + b = \circ \\ ab + 1 = a \xrightarrow{(1)} \circ = b(ab + 1) = ab \Rightarrow a = \circ \Rightarrow b = \frac{\circ}{\circ} \times \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$g(x-1) = \frac{x-\circ}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{x-\circ}{x+1}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(x-\circ)(x+1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{x^2 - x - \circ}{x^2 + \circ x + 1}$$

$$\Rightarrow m = -\circ \Rightarrow g(m) = g(-\circ) = \circ$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷

صورت کسر تابع g ، خطی و g نیز خطی است، پس مخرج کسری تابع ثابت باشد، پس شیب خط f برابر ۲ است.

$$f(x) = \circ x + \circ \xrightarrow{f(a)=\circ} a = -\frac{\circ}{\circ}$$

$$g(x) = \frac{x + \circ(\circ x + \circ)}{\circ x - (\circ x + \circ)} = -\frac{1}{\circ}(\Delta x + \circ)$$

$$g(a) = g(-\frac{\circ}{\circ}) = -\frac{1}{\circ}(-\frac{1\Delta}{\circ} + \circ) = \frac{1}{\circ}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸

فرض کنید $x + \frac{\circ}{\circ} = k$ و $k \in \mathbb{Z}$ باشد، در این صورت $x = k - \frac{\circ}{\circ}$ است.

$$\left[\frac{k - \frac{\circ}{\circ} + \circ}{\circ} \right] = k \Rightarrow \left[\frac{\circ k + \circ}{\circ} \right] = k$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{\circ k + \circ}{\circ} < k + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\circ} < k \leq \frac{\circ}{\circ} \Rightarrow \begin{cases} k = \circ \rightarrow x_1 = -\frac{\circ}{\circ} \\ k = 1 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{\circ} \end{cases}$$

بنابراین $x_1 + x_2 = -\circ$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹

$$f = \{(1, a), (2, 1), (-1, b), (3, -1)\}$$

$$2f = \{(1, 2a), (2, 2), (-1, 2b), (3, -2)\}$$

$$g = \{(2, a), (1, 4), (3, b-1)\}$$

$$\Rightarrow 2f + g = \{(1, 2a+4), (2, a+2), (3, b-3)\}$$

$$2a+4=a+2 \Rightarrow a=-2$$

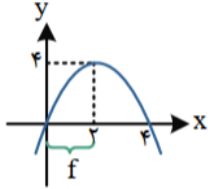
$$\Rightarrow ab = -6$$

قرار است $2f + g$ تابعی ثابت باشد، بنابراین:

$2f + g$ تابع ثابت صفر است و $b-3=0$ ، پس: $b=3$.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$-1 < [2x] - 2x \leq 0 \Rightarrow -2 < 2[2x] - 4x \leq 0 \Rightarrow 0 < f(x) \leq 2$$



نمودار $g(x)$ به صورت مقابل است:

اگر $f(x)$ را به عنوان ورودی به تابع $g(x)$ بدهیم، آن گاه:

$$0 < g \circ f(x) \leq 4 \Rightarrow R_{g \circ f} = (0, 4]$$

برد تابع شامل ۴ عدد صحیح است. $\{1, 2, 3, 4\}$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}} y = \sqrt{2(x-3)+1} = \sqrt{2x-5} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \sqrt{-2x+2}$$

$$g(x) = \sqrt{2-2x} \Rightarrow D_g = (-\infty, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x : x \in D_g, g(f(x)) \in D_g\} = \{x : x \leq 1, \sqrt{2-2x} \leq 1\}$$

$$\Rightarrow 2-2x \leq 1 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$D_{g \circ f} = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f(0) = 0 \Rightarrow a^3 - 4a = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2, a = -2$$

$$a = 0 \Rightarrow y = -\lambda x^3 \quad \text{غقیق}$$

$$a = 2 \Rightarrow y = (2-2x)^3 - \lambda = -\lambda(x-1)^3 - \lambda \quad \text{غقیق}$$

$$a = -2 \Rightarrow y = (-2-2x)^3 + \lambda = -\lambda(x+1)^3 + \lambda$$

تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس:

بنابراین $b = -1$ و $a = -2$ ، لذا $ab = 2$.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$D_g = \{6, b, 2a\}$$

$$\begin{cases} f(6) = 6 \Rightarrow f(-1) = 6 \Rightarrow a+2+b = 6 \Rightarrow a+b = 4 \\ f(b) = b \Rightarrow f(0) = b \Rightarrow b = b \\ f(2a) = 2a \Rightarrow f(1) = 2a \Rightarrow a-2+b = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ a+b = 2a+2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3 \Rightarrow ab = 3$$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ a+b = 2a+2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3 \Rightarrow ab = 3$$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ a+b = 2a+2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3 \Rightarrow ab = 3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

$$\begin{cases} f(2-x) = \sqrt{2x+1} \\ 2-x=t \Rightarrow x=2-t \Rightarrow f(t) = \sqrt{2(2-t)+1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{5-2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x+3) = \sqrt{4-2x} \\ x+3=t \Rightarrow x=t-3 \Rightarrow g(t) = \sqrt{4-2(t-3)} \Rightarrow g(x) = \sqrt{10-2x} \end{cases}$$

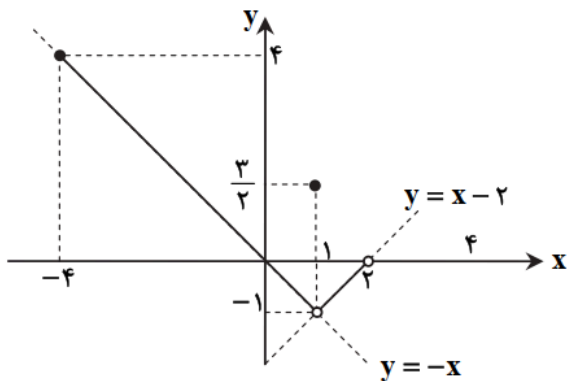
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \in D_f \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{5-2x} \leq 5 \Rightarrow 5-2x \leq 25 \Rightarrow x \geq -10$$

$$D_{g \circ f} = \left[-10, \frac{5}{2}\right] \Rightarrow \text{۱۳ عدد صحیح} = -10, \dots, -1, 0, 1, 2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



نکته: مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های یک تابع را دامنه آن تابع می‌نامیم.

نکته: مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های یک تابع را برد آن تابع می‌نامیم.

با رسم نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل روبه‌رو داریم:

$$\text{دامنه: } D = [-4, 2]$$

$$\text{برد: } R = [-1, 4]$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷

نکته: در تابع ثابت $f(x) = k$ برد تابع تک‌عضوی است.

با توجه به نکته و ضابطه داده شده، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x+2 & x \geq 1 \\ b-a & x < 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{تک‌عضوی است.}]{\text{برد تابع}} a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ b-1 & x < 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{تک‌عضوی است.}]{\text{برد تابع}} b-1=2 \Rightarrow b=3$$

بنابراین $a+b=4$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸

نکته: اگر مؤلفه‌های اول و دوم همه زوج‌های مرتب تابع $f(x)$ را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون $f(x)$ می‌گوییم و با نماد $f^{-1}(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$\text{نکته: } f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & x \geq -1 \\ x+3 & x < -1 \end{cases}$$

$$f^{-1}(1) = a \Rightarrow f(a) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3a+5=1 \Rightarrow a=-\frac{4}{3} \xrightarrow{x \geq -1} \text{غیرقابل قبول} \\ a+3=1 \Rightarrow a=-2 \xrightarrow{x < -1} a=-2 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین $f^{-1}(1) = -2$ است.

$$f^{-1}(5) = b \Rightarrow f(b) = 5 \Rightarrow \begin{cases} 3b+5=5 \Rightarrow b=0 \xrightarrow{x \geq -1} b=0 \text{ قابل قبول} \\ b+3=5 \Rightarrow b=2 \xrightarrow{x < -1} \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$$f^{-1}(5) + f^{-1}(1) = 0 - 2 = -2$$

بنابراین $f^{-1}(5) = 0$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹

نکته: مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها، زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند.

$$\begin{cases} (1, 2-m) \in f \\ (1, m^2) \in f \end{cases} \Rightarrow 2-m = m^2 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 1, -2 \quad (*)$$

$$\begin{cases} (2, -1) \in f \\ (2, m+1) \in f \end{cases} \Rightarrow -1 = m+1 \Rightarrow m = -2 \quad (**)$$

$$f = \{(1, 4), (2, -1), (0, 3)\} \Rightarrow f(0) = 3$$

از اشتراک (*) و (**) نتیجه می‌گیریم $m = -2$ ، پس:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو در بُرد نظیر شود، تابع را همانی می‌گوییم. نمودار تابع همانی خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ نمایش می‌دهیم.

$$(b+1, 4): b+1=4 \Rightarrow b=3$$

در هر زوج مرتب، باید مؤلفه اول با مؤلفه دوم برابر باشد. پس:

$$(a+b, 5): a+b=5 \xrightarrow{b=3} a+3=5 \Rightarrow a=2$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده، داریم:

$$(a^2-1, 3): a^2-1=3 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$$

بنابراین:

$$a=2, b=3$$

$$a \times b = 2 \times 3 = 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱

نکته: تابعی خطی است که ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ باشد. مطابق نکته داریم:

$$f(x) = ax^2 + bx + 2b - x^2 - a = (a-1)x^2 + bx + 2b - a \xrightarrow{f \text{ تابع خطی است}} a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x) = bx + 2b - 1$$

$$3 = 2b - 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 3$$

مطابق فرض سؤال $f(0) = 3$ ، پس:

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

محل تقاطع با محور طول‌ها را به دست می‌آوریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲

نکته: نمودار تابع $f(x) + k$ را می‌توان با انتقال $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y ها در جهت علامت k به‌دست آورد.

نکته: نمودار تابع $f(x + k)$ را می‌توان با انتقال $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور x ها به‌دست آورد. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

تابع را یک واحد به چپ برده‌ایم، پس:

$$f(x+1) = |x+1+3| = |x+4|$$

$$g(x) = |x+4| - 2 \Rightarrow g(0) = 4 - 2 = 2$$

حال تابع را دو واحد به پایین انتقال داده‌ایم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\sqrt{u^2} = |u|$$

نکته: مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را «بردار» آن تابع می‌نامند. با استفاده از نکات بالا داریم:

$$f(x) = |x-1| + 1 - \sqrt{x^2 + 1 - 2x} = |x-1| + 1 - \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| + 1 - |x-1| = 1$$

بنابراین: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{1\}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳

نکته: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه $|k|$ واحد در امتداد محور y ها به‌دست آورد. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $f(x + k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

با توجه به نمودار تابع f ، این تابع همان نمودار تابع $y = |x|$ است که ۲ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است. پس

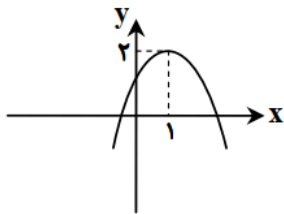
$$f(x) = |x+2| - 1 \Rightarrow a = 2 \text{ و } b = 1$$

ضابطه آن به صورت زیر است:

حال نمودار تابع $g(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$g(x) = -(x-1)^2 + 2$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴

نکته: حجم استوانه‌ای با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:

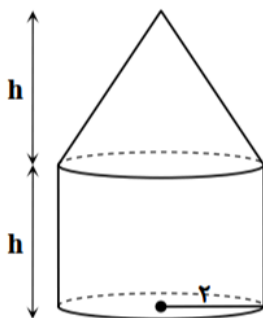
$$V = \pi r^2 h$$

نکته: حجم مخروطی با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

حجم منبع برابر مجموع حجم استوانه و مخروط است که برابر است با:

$$V = \pi (2)^2 h + \frac{1}{3} \pi (2)^2 h = \frac{16}{3} \pi h$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶

نکته: تابعی به صورت $f(x) = k$ و $k \in \mathbb{R}$ که برد آن فقط شامل یک عضو است را تابع ثابت می‌گویند.

نکته: تابع $f(x) = x$ که هر عضو از دامنه تابع را دقیقاً به همان عضو در برد نظیر می‌کند، تابع همانی می‌گویند.

با توجه به نکات داریم:

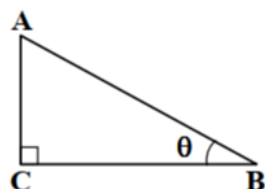
$$f(x) = k \text{ و } g(x) = x$$

$$\frac{g(-3) + f(4)}{f(5) - g(2)} = 2 \Rightarrow \frac{-3 + k}{k - 2} = 2 \Rightarrow 2k - 4 = -3 + k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow f(-3) = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو از برد تابع نظیر شود، تابع را همانی گوئیم. اگر دامنه



$$\sin \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot \theta = \frac{BC}{AC}$$

تابع همانی $\mathbb{R}$ باشد، ضابطه آن $f(x) = x$ است.

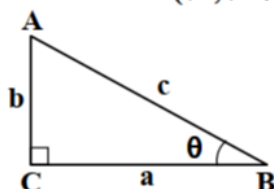
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه شکل روبه‌رو داریم:

طبق فرض تابع f همانی است، پس داریم:

$$(4, a) \in f \Rightarrow a = 4$$

$$(b, a-1) \in f \Rightarrow b = a-1 \xrightarrow{a=4} b = 3$$

$$(2c, 2a+b-1) \in f \Rightarrow 2c = 2a+b-1 \xrightarrow[b=3]{a=4} c = 5$$



$$\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$$

بنابراین در مثلث ABC داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸

نکته: اگر مؤلفه‌های اول و دوم همه زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که وارون f می‌گوییم و با f^{-1} نمایش

می‌دهیم.

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a \\ (a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1} \end{cases}$$

اگر معکوس تابع $f(x) = x^3 + 2x - 1$ محور طول‌ها را در $x = a$ قطع کند، پس داریم:

$$f^{-1}(a) = 0 \Rightarrow f(0) = a$$

$$f(x) = x^3 + 2x - 1 \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow a = -1$$

پس کافی است در تابع $f(x)$ مقدار $f(0)$ را به دست آوریم.

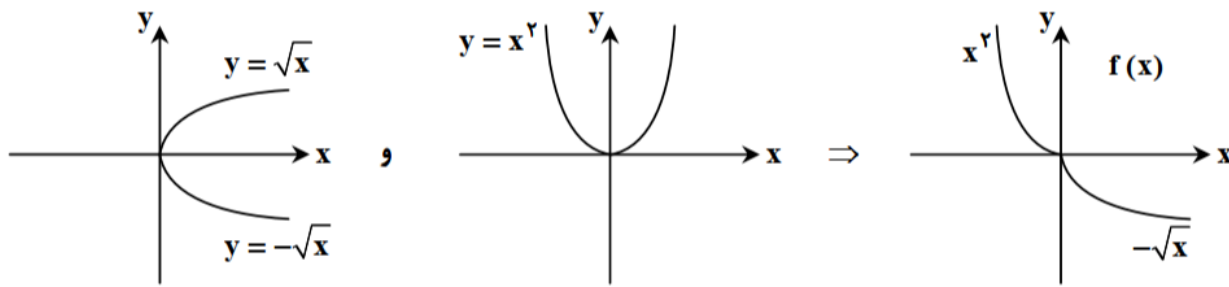
$$a = -1 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 - 4 - 1 = -13$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

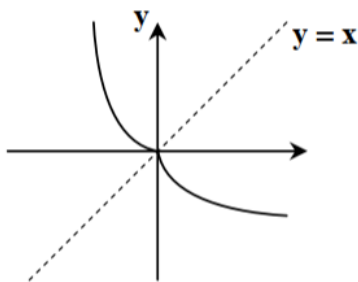
۲۹

نکته: برای رسم نمودار وارون تابع $f(x)$ ، کافیست قرینه نمودار $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ که همان نیمساز ناحیه اول و سوم است رسم کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ باید نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. هر ضابطه را جداگانه رسم می‌کنیم و سپس $f(x)$ را با توجه به دامنه هر ضابطه رسم می‌کنیم:



حال قرینه $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار f و f^{-1} بر هم منطبق هستند و گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰

نکته: دامنه تابع گویا برابر است با: $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, -2, 3$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 3\}$$

پس دامنه تابع فقط شامل یک عدد طبیعی (۳) نیست.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۱

نکته: برای به دست آوردن ضابطه وارون تابع وارون‌پذیر $y = f(x)$ ، ابتدا x را بر حسب y به دست می‌آوریم. سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم.

$$y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

ابتدا ضابطه وارون تابع خطی $y = 2x + 1$ را تعیین می‌کنیم:

اکنون می‌توان نوشت:

$$2f^{-1}(x) + 4f^{-1}(2x) = x + 4 \Rightarrow 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4\left(\frac{2x-1}{2}\right) = x + 4 \Rightarrow x - 1 + 4x - 2 = x + 4 \Rightarrow 4x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۲

نکته: دامنه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ ، به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$D_{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

ابتدا دامنه دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad D_f : 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$g(x) = \frac{x^2-2x}{\sqrt{x+1}} \quad D_g : x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D_g = (-1, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = [-2, 2] \cap (-1, +\infty) = (-1, 2]$$

اکنون باید مقادیری از x که به‌ازای آن‌ها $g(x) = 0$ است را از $D_f \cap D_g$ حذف کنیم:

$$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

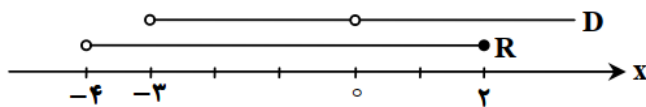
$$D_{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} = (-1, 2] - \{0, 2\} = (-1, 2) - \{0\}$$

بنابراین دامنه تابع $\frac{f}{g}$ ، فقط شامل عدد صحیح $x = 1$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$D = (-3, 0) \cup (0, +\infty), \quad R = (-4, 2]$$

ابتدا دامنه و برد تابع را از روی نمودار به دست می‌آوریم:



$$D - R = (2, +\infty)$$

بنابراین:

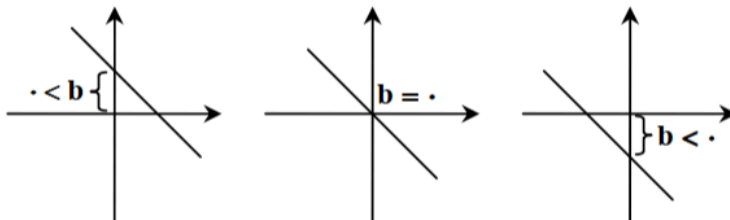
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴

نکته: هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که به مقدار a شیب خط و به مقدار b عرض از مبدأ خط (محل برخورد تابع با محور عرض‌ها) گفته می‌شود.

نکته: اگر در تابع $y = ax + b$ ، $a > 0$ باشد، نمودار از ناحیه اول و سوم حتماً عبور می‌کند و اگر $a < 0$ باشد، نمودار از ناحیه دوم و چهارم حتماً عبور خواهد کرد.

مطابق فرض سؤال، برای اینکه خط از ناحیه سوم عبور نکند، مطابق نکته باید شیب خط منفی باشد:



$$2 - m < 0 \Rightarrow m > 2 \quad (I)$$

با توجه به شکل‌های روبه‌رو، باید عرض از مبدأ تابع مثبت باشد تا تابع فقط از ناحیه سوم عبور نکند:

$$9 - m > 0 \Rightarrow m < 9 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow 2 < m < 9 \Rightarrow m \in (2, 9)$$

پس ۶ مقدار صحیح ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ برای m وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵

نکته: در تابع $y = f(x)$ برای به دست آوردن مقدار تابع در نقطه $x = a$ کافی است مقدار a را در ضابطه تابع قرار دهیم:

$$x = a \Rightarrow y = f(a)$$

مقدار $f(a)$ زمانی قابل محاسبه است که $x = a$ در دامنه تابع باشد.

$$f(3) - 2x + f(-x) = 0 \xrightarrow{x=-3} f(3) - 2(-3) + f(3) = 0 \Rightarrow 2f(3) + 6 = 0 \Rightarrow f(3) = -3$$

$$-3 - 2x + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = 2x + 3 \xrightarrow{x=2} f(-2) = 7$$

بنابراین مقدار $f(3) = -3$ است، در نتیجه:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۶

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.
اگر دامنه تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

$$f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \\ b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر a و b در تابع $g(x)$ ، $g(x) = 4$ به‌دست می‌آید:

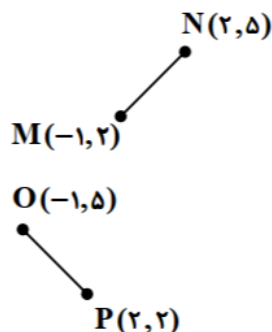
$$\begin{cases} g(x) = 4 \Rightarrow g(b) = 4 \\ f(a) = a = 2 \end{cases} \Rightarrow g(b) + f(a) = 4 + 2 = 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۷

نکته: هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که در آن مقدار a ، شیب خط و مقدار b ، عرض از مبدأ خط می‌باشد.

اگر دامنه تابع $[-1, 2]$ و برد آن $[2, 5]$ باشد، دو حالت زیر رخ می‌دهد:



$$a = \frac{5-2}{2-(-1)} = 1 \Rightarrow y = x + b \xrightarrow{N(2,5)} 5 = 2 + b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow y = x + 3$$

$$a = \frac{5-2}{-1-2} = -1 \Rightarrow y = -x + b \xrightarrow{P(2,2)} 2 = -2 + b \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = -x + 4$$

نقطه A محل برخورد این دو خط می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow x + 3 = -x + 4 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

پس مجموع طول و عرض نقطه A ، برابر با $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸

نکته: هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که در آن مقدار a شیب خط و مقدار b عرض از مبدأ خط است.

با توجه به شکل، وقتی $x \leq 1$ ، ضابطه تابع خطی است که از نقاط $(0, 2)$ و $(-3, 0)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$\text{شیب} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{-3 - 0} = \frac{2}{3}$$

چون عرض از مبدأ آن $y = 2$ است، معادله به‌صورت $y = \frac{2}{3}x + 2$ و مقدار $a = \frac{2}{3}$ است و داریم:

$$f(1) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

ضابطه دوم تابع ثابت $y = b$ در بازه $1 < x < c$ است، پس مقدار b برابر $\frac{8}{3}$ است، زیرا نقطه $(1, \frac{8}{3})$ محل برخورد ضابطه اول و دوم است.

در ضابطه سوم $x \geq c$ و در این نقطه تابع با محور x برخورد کرده است، بنابراین $f(c) = 0$. در نتیجه:

$$-x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow c = 3$$

پس مقدار $a = \frac{2}{3}$ ، $b = \frac{8}{3}$ و مقدار $bc = 8$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹

نکته: دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$ توابع f و g در گزینه ۴ مساوی هستند، زیرا دامنه هر دو تابع برابر مجموعه اعداد حقیقی است (توجه کنید که به ازای هر x ، $2^x + 1$ عددی

$$\text{مخالف صفر است) و داریم:} \quad f(x) = \frac{2^{2x} + 2^{x+1} + 1}{2^x + 1} = \frac{(2^x)^2 + 2 \times 2^x + 1}{2^x + 1} = \frac{(2^x + 1)^2}{2^x + 1} = 2^x + 1 = g(x)$$

در سایر گزینه‌ها، دو تابع برابر نیستند، زیرا:

$$\text{گزینه ۱:} \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[2 \times \frac{1}{2}\right] = [1] = 1 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \left[\frac{1}{2}\right] = 2 \times 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \neq g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{گزینه ۲:} \begin{cases} D_f : x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq 0 \\ D_g : x-1 \geq 0, x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$\text{گزینه ۳:} \begin{cases} D_f : x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < 0 \\ D_g : x-1 > 0, x > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\text{نکته: } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} ; D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

۴۰

با توجه به نمودارها مجموعه طول نقاط f و g به ترتیب D_f و D_g را مشخص می‌کند و داریم:

$$D_f = [-1, +\infty) , D_g = (-\infty, 1] , g(-1) = g(1) = 0$$

بنابراین:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = (-1, 1)$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

$$f = \{(0, m^2), (1, 3m-2), (2, 3)\}$$

با مرتب کردن زوج مرتب‌های تابع f بر حسب افزایش x داریم:

$$0 < 1 \Rightarrow m^2 < 3m-2 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 < 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-2) < 0 \Rightarrow 1 < m < 2 \quad (1)$$

$$1 < 2 \Rightarrow 3m-2 < 3 \Rightarrow m < \frac{5}{3} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 1 < m < \frac{5}{3} \Rightarrow m \in (1, \frac{5}{3})$$

بنابراین:

۴۱

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۲

نکته: برای به دست آوردن دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ ، مجموعه جواب نامعادله $f(x) \geq 0$ را به دست می آوریم.

نکته: در تابع اکیداً نزولی f ، اگر $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه: $x_1 \geq x_2$

برای به دست آوردن دامنه تابع داریم:

$$f(x^2 - x) - f(x + 3) \geq 0 \Rightarrow f(x^2 - x) \geq f(x + 3) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} x^2 - x \leq x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ \Rightarrow (x + 1)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 روی $\mathbb{R}$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی می نامیم.

تابع $y = \sqrt{4 - 2x} + 1$ با دامنه $(-\infty, 2]$ مطابق شکل روبه رو یک تابع

اکیداً نزولی است. برای آنکه تابع f نیز اکیداً نزولی باشد، می بایست اولاً

$y = kx + 9$ خطی با شیب منفی باشد (تا این قسمت تابع نیز اکیداً نزولی

باشد) ثانیاً باید نمودار این تابع در $x = 2$ از نقطه ای پایین تر یا روی نقطه

$(2, 3)$ شروع شود، پس:

$$\left. \begin{array}{l} k < 0 \\ 2k + 9 \leq 3 \Rightarrow 2k \leq -6 \Rightarrow k \leq -3 \end{array} \right\} \Rightarrow k \leq -3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۴

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می نامیم.

باید نامعادله $\frac{x-2}{xf(x)} \geq 0$ را حل کنیم. برای تعیین علامت $f(x)$ چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، داریم:

$$x < -1 \Rightarrow f(x) > f(-1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x > -1 \Rightarrow f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 0$$

بنابراین برای $x < -1$ ، $f(x)$ مثبت و برای $x > -1$ ، $f(x)$ منفی است.

x	-1	0	2	
$x-2$	-	-	-	+
x	-	-	+	+
$f(x)$	+	-	-	-
$\frac{x-2}{xf(x)}$	$\boxed{+}$	$\frac{-}{-}$	$\boxed{+}$	$\frac{-}{-}$
	ج	ن	ج	ج

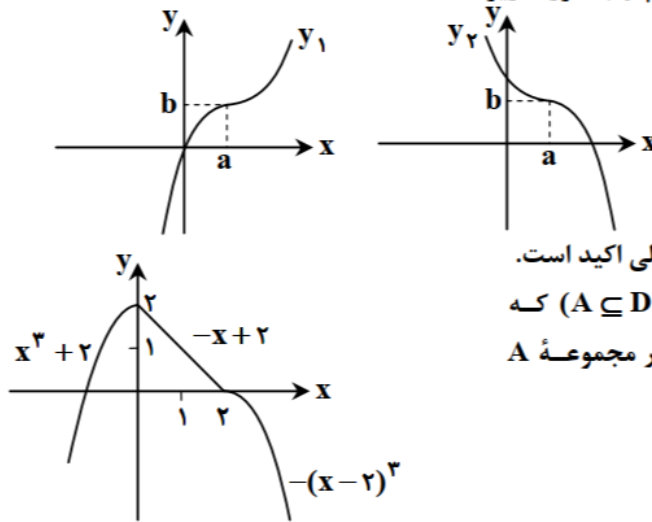
$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup (0, 2]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۵

نکته: نمودار توابع $y_1 = (x-a)^3 + b$ و $y_2 = -(x-a)^3 + b$ به صورت زیر است ($a, b > 0$).

با توجه به ضابطه f می توان نمودار را به صورت زیر رسم کرد:



همان طور که روی شکل می بینید تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ نزولی اکید است.

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که

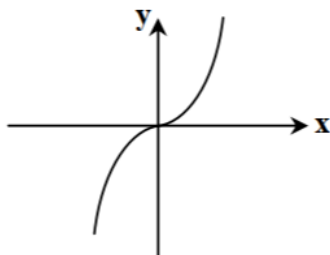
$x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را در مجموعه A

تابعی اکیداً نزولی می نامیم.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۶

نکته: نمودار تابع $f(x) = x^3$ به صورت مقابل است.



تابع $f(x) = x^3$ ، ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین منتقل شده است تا نمودار داده شده در سؤال حاصل شود، پس ضابطه آن به صورت زیر است.

$$y = (x-3)^3 - 2 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - 2 = x^3 - 9x^2 + 27x - 29$$

بنابراین:

$$a = -9, b = 27, c = -29$$

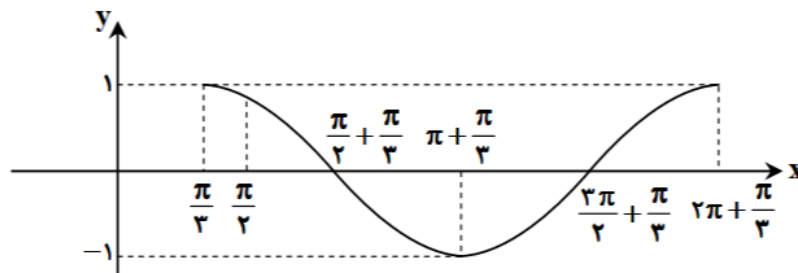
$$b - a + c = 27 - (-9) - 29 = 7$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۷

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را در مجموعه A

تابعی اکیداً نزولی می نامیم. نمودار تابع $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست انتقال می دهیم تا نمودار $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ حاصل شود.



تابع بر روی بازه $(\frac{\pi}{3}, \pi + \frac{\pi}{3})$ و زیرمجموعه های آن اکیداً نزولی است. پس حداکثر m برابر $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۸

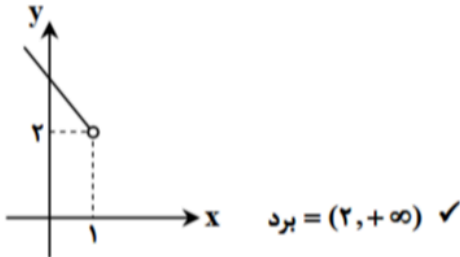
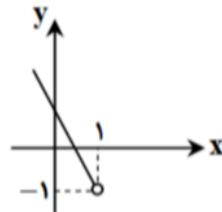
نکته: اگر برای هر x_1 و x_2 از دامنه f که $x_2 > x_1$ داشته باشیم: $f(x_2) < f(x_1)$ را تابعی اکیداً نزولی می‌گوییم.

برای اینکه تابع دوضابطه‌ای f اکیداً نزولی باشد، باید هر دو ضابطه تابع اکیداً نزولی بوده و بردهای این دو تابع با هم اشتراکی نداشته باشند.

می‌دانیم توابع خطی با شیب مثبت، صعودی‌اند پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست است.

از طرفی برد تابع $y = -2x + 3$ برای $x \geq 1$ برابر $(-\infty, 1]$ است، حال گزینه‌های ۳ و ۴ را برای $x < 1$ رسم می‌کنیم. جواب گزینه‌ای است که برد آن با $(-\infty, 1]$ اشتراکی نداشته باشد.

گزینه ۳:

برد = $(2, +\infty)$ ✓برد = $(-1, +\infty)$ ✗

گزینه ۴:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

نکته: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ ، عبارت موردنظر را ساده می‌کنیم:

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \theta \times \sin^2 \theta}} = \sqrt{1 + 2|\sin \theta \cos \theta|}$$

در ربع چهارم دایره مثلثاتی، سینوس منفی و کسینوس مثبت است، پس:

$$A = \sqrt{1 + 2(-\sin \theta \cos \theta)} = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta} = \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = |\sin \theta - \cos \theta|$$

با توجه به اینکه در ربع چهارم دایره مثلثاتی، $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta > 0$ داریم: $\sin \theta - \cos \theta < 0$ ، پس:

$$A = |\sin \theta - \cos \theta| = -\sin \theta + \cos \theta$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۰

نکته: بین دامنه و برد یک تابع و وارونش همواره رابطهٔ روبه‌رو برقرار است: $R_{f^{-1}} = D_f, D_{f^{-1}} = R_f$

ابتدا توجه کنید که با شرط $2 \leq x < 3$ ، خواهیم داشت $[x] = 2$. اکنون باید ضابطهٔ وارون تابع خطی $f(x) = 2x + 1$ را با شرط $2 \leq x < 3$ تعیین کنیم (توجه کنید که با این شرط، برد تابع $f(x)$ به‌صورت بازهٔ $[5, 7)$ است).

$$y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}; \quad 5 \leq x < 7$$

توجه کنید که با توجه به نکتهٔ بالا، برد تابع $f(x)$ را به‌عنوان دامنهٔ تابع $f^{-1}(x)$ نوشته‌ایم.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

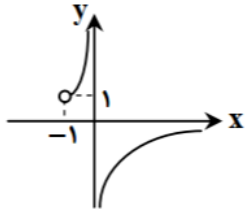
۵۱

ابتدا با یافتن دامنه f و g ، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست می آوریم: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$ ، $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$: نکته

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_f = D_g = [-1, +\infty) \Rightarrow D_f \cap D_g = [-1, +\infty) , \quad g(x) = 0 \Rightarrow -x\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = [-1, +\infty) - \{0, -1\} = (-1, +\infty) - \{0\}$$

حال ضابطه $\frac{f}{g}$ را یافته و نمودار آن را رسم می کنیم:



$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{-x\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{x}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۲

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را در مجموعه A تابعی اکیداً نزولی می نامیم.

$$-4 < 3 < 5 \Rightarrow f(-4) > f(3) > f(5) \Rightarrow 9 - m > 2m > m - 1$$

$$\begin{cases} 9 - m > 2m \Rightarrow 3m < 9 \Rightarrow m < 3 \\ 2m > m - 1 \Rightarrow m > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 3$$

مقادیر صحیح m عبارتند از ۰، ۱، ۲ که مجموع آن ها برابر ۳ است.

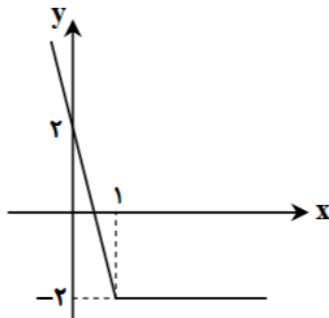
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۳

نکته: اگر به ازای هر $a > b$ از دامنه f داشته باشیم $f(a) < f(b)$ آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی و اگر داشته باشیم $f(a) \leq f(b)$ آنگاه f را نزولی می گویند.

ابتدا ضابطه تابع را بدون قدرمطلق بازنویسی می کنیم:

$$y = 2|1-x| - 2x = \begin{cases} 2(-1+x) - 2x & x \geq 1 \\ 2(1-x) - 2x & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} -2 & x \geq 1 \\ -4x + 2 & x < 1 \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع داده شده به صورت زیر است:

مطابق شکل فوق تابع موردنظر نزولی است، ولی اکیداً نزولی نمی باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

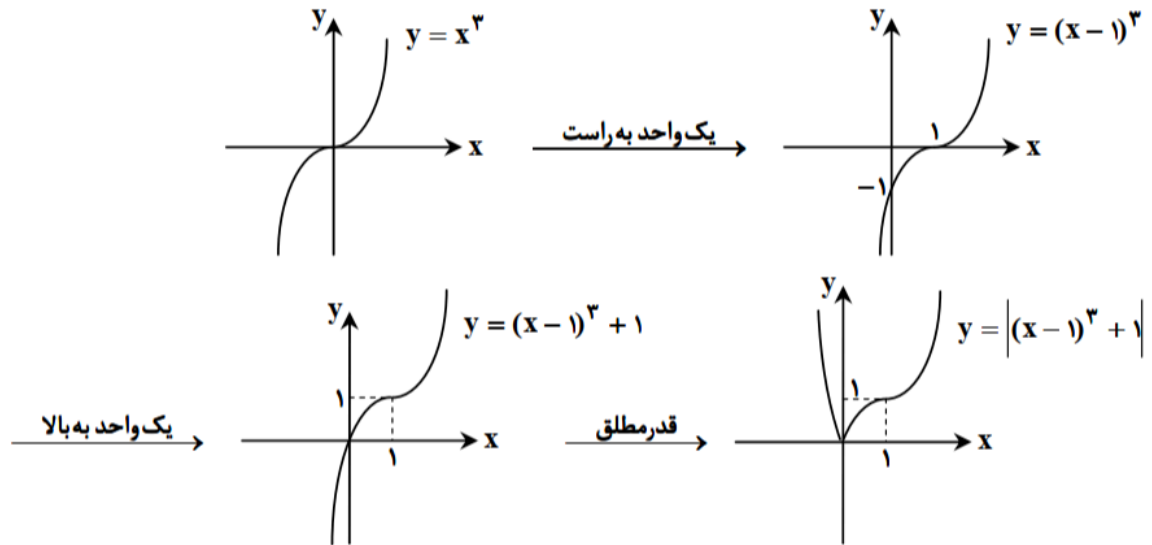
۵۴

نکته: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

نکته: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور طول‌ها است، قرینه نمودار f را نسبت به محور طول‌ها رسم کنیم.

با توجه به اینکه $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ، پس:

$$y = |x^3 - 3x^2 + 3x| = |(x-1)^3 + 1|$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۵

نکته: برای $k > 0$ نمودار $y = f(x+k)$ از انتقال نمودار $y = f(x)$ به اندازه k واحد در جهت منفی محور x ‌ها حاصل می‌شود.
 نکته: اگر $k > 0$ ، برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، نمودار $y = f(x)$ را k واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

با توجه به تبدیل‌های گفته‌شده داریم:

$$f(x) = -\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x \rightarrow x+3} y = -\frac{1}{x+3} \xrightarrow[\text{۲ واحد به بالا}]{+2} y = -\frac{1}{x+3} + 2$$

محل تقاطع نمودار حاصل با تابع f از حل معادله زیر به دست می‌آید:

$$-\frac{1}{x+3} + 2 = -\frac{1}{x} \xrightarrow{\times x(x+3)} -x + 2x(x+3) = -(x+3)$$

$$\Rightarrow -x + 2x^2 + 6x = -x - 3 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

ریشه‌های معادله فوق α و β هستند که داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-3)^2 - 2 \times \frac{3}{2} = 9 - 3 = 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۶

نکته: دامنه تابع $g \circ f$ برابر است با: $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ است، پس:

$$D_{g \circ f} = \left\{x \neq 2 \mid f(x) \neq \frac{3}{2}\right\} = \left\{x \neq 2 \mid \frac{x}{x-2} \neq \frac{3}{2}\right\} \quad (*)$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{3}{2} \quad \text{اکنون معادله } \frac{x}{x-2} = \frac{3}{2} \text{ را حل می‌کنیم:}$$

$$\Rightarrow 2x = 3x - 6$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$D_{g \circ f} = \{x \neq 2 \mid x \neq 6\} = \mathbb{R} - \{2, 6\} \quad (*) \text{ داریم:}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۷

ابتدا ضابطه دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{نکته}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = 3 - x^2 - 2x - 1 = -x^2 - 2x + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(f(x))^2 - 2f(x) + 3 = -(x-1)^2 - 2(x-1) + 3 = -x^2 + 4$$

طول محل تلاقی دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ ریشه معادله $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ است، پس داریم:

$$-x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4$$

$$\Rightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow a = -1$$

عرض نقطه تلاقی از جای گذاری $x = -1$ در یکی از دو تابع $f \circ g$ یا $g \circ f$ به دست می‌آید.

$$b = (g \circ f)(-1) = -1 + 4 = 3 \Rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۸

نکته: دامنه $g \circ f$ به صورت مقابل است:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

ابتدا دامنه توابع f و g را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{2-x} \Rightarrow 2-x \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$g(x) = \frac{1}{x-3} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid f(x) \in \mathbb{R} - \{3\}\} \quad \text{دامنه } g \circ f \text{ به صورت زیر است:}$$

$$\sqrt{2-x} \neq 3$$

$$\Rightarrow 2-x \neq 9$$

$$\Rightarrow x \neq -7$$

$$D_{g \circ f} = \{x \leq 2 \mid x \neq -7\}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = (-\infty, 2] - \{-7\}$$

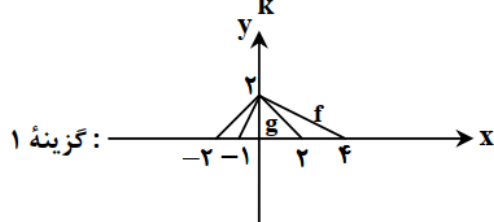
$$a - b = 2 - (-7) = 9$$

بنابراین $a = 2$ و $b = -7$ داریم:

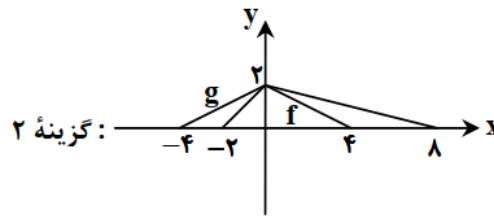
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۹

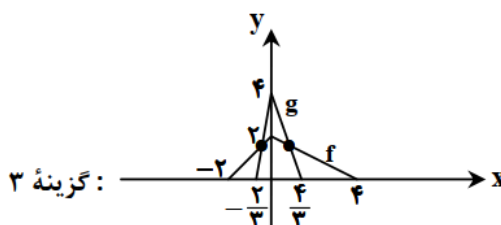
نکته: برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط روی تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.
 نکته: برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط روی تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.



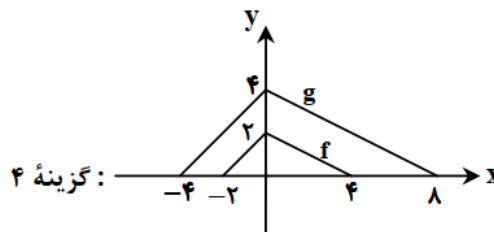
تعداد نقاط تقاطع: ۱



تعداد نقاط تقاطع: ۱



تعداد نقاط تقاطع: ۲



تعداد نقاط تقاطع: صفر

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$0 < \left| \frac{5-x}{x} \right| < x$$

با توجه به توضیحات مسئله نامعادله زیر در مجموعه $\{b\} - (a, +\infty)$ برقرار است.

۶۰

سمت چپ نامعادله به طور کاملاً مشخص به ازای $x \in \mathbb{R} - \{0, 5\}$ برقرار است. در سمت راست $\frac{|5-x|}{|x|} < x$ با $x > 0$ برقرار بوده و برای حل آن طرفین وسطین می‌کنیم.

$$|5-x| < x|x| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (5-x)^2 < x^4 \rightarrow x^4 - (x-5)^2 > 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x^2 + x - 5)(\underbrace{x^2 - x + 5}_{\text{همواره +}}) > 0 \rightarrow x^2 + x - 5 > 0$$

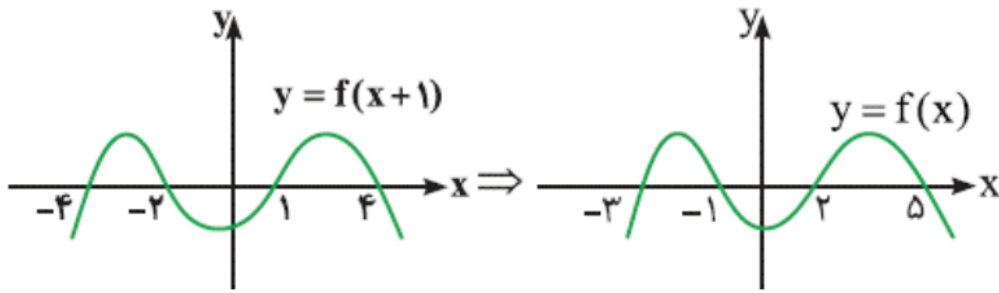
$$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right) \xrightarrow{x>0, x \neq 5} \left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}, +\infty\right) - \{5\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{21}-1}{2} \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = \sqrt{21} + 4$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۱

نمودار تابع $y = f(x+1)$ را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به دست آید:



حالا دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 + 4x + 3)}f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(x^2 + 4x + 3)f(x) \geq 0$$

x	-3	-1	2	5
$x^2 + 4x + 3$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$(x^2 + 4x + 3)f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$

پس دامنه تابع به صورت $\{-3, -1\} \cup [2, 5]$ است که شامل ۶ عدد صحیح است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۲

ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

چون $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ است، پس $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ است و بُرد تابع f به صورت بازه $[2, +\infty)$ است که شامل فقط عدد طبیعی $x=1$ نیست.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۳

چون $D_f = \emptyset$ است، پس مخرج کسر باید همواره برابر صفر باشد، یعنی اولاً باید ضریب x یعنی $a^2 - 9 = 0$ باشد:

$$a^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \quad \checkmark \rightarrow f(x) = \frac{3x+4}{0} \Rightarrow D_f = \emptyset \\ a = -3 \rightarrow f(x) = \frac{-3x+4}{-12} = \frac{3x-4}{12} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow g(x) = 3x+4 \Rightarrow g(1) = 7$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۴

دامنه تابع ثابت g برابر $\mathbb{R}$ است، بنابراین دامنه تابع f هم باید برابر $\mathbb{R}$ باشد، پس مخرج کسر تابع f ، نباید ریشه حقیقی داشته باشد:

$$x^2 + x - a = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 4a < 0 \rightarrow a < -\frac{1}{4}$$

از طرفی ضابطه دو تابع هم باید با هم برابر باشد:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2(x^2 + x - a)}{x^2 + x - a} = 2 \\ g(x) = a^x - a + 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow 2 = a^x - a + 2 \rightarrow a(a^x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 & \times \\ a = 1 & \times \\ a = -1 & \checkmark \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۵

برای چند جمله‌ای بودن f باید توان x ها عددی حسابی باشد:

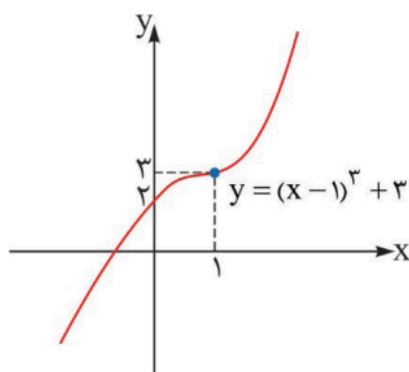
$$\begin{cases} n - 3 \geq 0 \rightarrow n \geq 3 \\ \frac{2n + 3}{n} \in \mathbb{W} \rightarrow 2 + \frac{3}{n} \in \mathbb{W} \xrightarrow{n \geq 3} n = 3 \checkmark \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

حالا ضابطه تابع f را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = x^3 + x^3 + 2x^0 + 3 - 1 = 2x^3 + 4$$

$$\Rightarrow y = \frac{f(x) - g(x)}{2} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 4}{2} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3 = (x - 1)^3 + 3$$

با رسم نمودار مشخص است که این تابع از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۶

با تبدیل x به $-x$ نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود و با تبدیل x به $x-4$ نمودار حاصل 4 واحد به راست منتقل می‌شود. بنابراین:

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-4} y = \sqrt{-(x-4)} \\ \rightarrow g(x) = \sqrt{-x+4}$$

حال تابع $y = (f-g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$y = (f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{-x+4} \rightarrow D_y = [0, 4]$$

با توجه به اینکه f تابعی اکیدا صعودی و g تابعی اکیدا نزولی است، پس تابع $f-g$ تابعی اکیدا صعودی بوده و کمترین مقدار این تابع به ازای $x=0$ (ابتدای دامنه) و بیشترین مقدار این تابع به ازای $x=4$ (انتهای دامنه) است.

$$(f-g)(0) \leq (f-g)(x) \leq (f-g)(4) \rightarrow -2 \leq (f-g)(x) \leq 2$$

پس برد تابع $y = (f-g)(x)$ برابر $[-2, 2]$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۷

برای این که تابع $f(x) = (k^2-9)x^3 + 5$ اکیدا نزولی باشد، باید ضریب x^3 منفی باشد.

بیشترین مقدار صحیح k برابر 2 است، پس به ازای بیشترین مقدار صحیح k تابع $f(x) = -5x^3 + 5$ است.

در ضمن چون تابع $g(x) = mx^2 - nx - k$ هم صعودی و هم نزولی است، پس تابعی ثابت است، یعنی $m=n=0$ است. بنابراین به

ازای بیشترین مقدار صحیح k ، $g(x) = -2$ است و داریم:

$$f(g(10)) = f(-2) = -5 \times (-2)^3 + 5 = 45$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۸

با توجه به شکل $D_f = [-1, +\infty)$ و با توجه به ضابطه $g(x)$:

$$D_g = D_f - \{x | f(x) = 1\} \Rightarrow D_g = [-1, +\infty) - \{1, 5\}$$

طبق تعریف $D_{f \circ g}$ داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ [-1, +\infty) - \{1, 5\} \mid \frac{1}{f(x)-1} \geq -1 \right\}$$

$$\frac{1}{f(x)-1} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x)-1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ \text{یا} \\ f(x) > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [-1, 0] \cup [2, 3] \\ (\Delta, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_{f \circ g} = [-1, 0] \cup [2, 3] \cup (\Delta, +\infty)$$

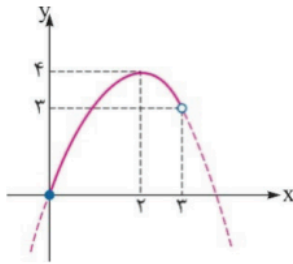
در این دامنه، اعداد طبیعی 1 و 4 و 5 نیستند.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۹

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ است. پس اگر طرفین را در ۳ ضرب کنیم. نتیجه می‌گیریم که $0 \leq 3x - 3[x] < 3$ است. بنابراین باید بُرد

$g(x) = -x^2 + 4x$ را به‌ازای ورودی $[0, 3]$ به دست می‌آوریم که طبق نمودار برابر است با:



$\text{gof} = [0, 4]$ برد تابع

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۰

با توجه به نمودار صورت سوال، ضابطه تابع f به‌صورت $f(x) = a(x+8)(x-4)$ است که چون دهانه سهمی رو به پایین است، پس a مقداری منفی است. حالا $f(x-3)$ و $f(-2x)$ را پیدا می‌کنیم:

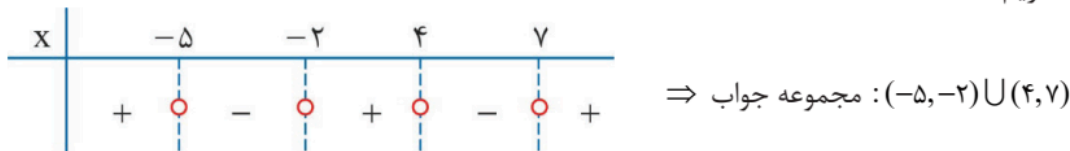
$$f(x-3) = a(x+5)(x-7)$$

$$f(-2x) = a(-2x+8)(-2x-4) = 4a(x-4)(x+2)$$

$$4a^2(x+5)(x-7)(x-4)(x+2) < 0$$

پس نامعادله $f(x-3)f(-2x) < 0$ به‌صورت مقابل است:

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:



پس مجموعه جواب این نامعادله شامل ۴ عدد صحیح $x = -4, -3, 5, 6$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۱

در یک تابع صعودی، با افزایش مقدار x خروجی تابع افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند (کاهش نمی‌یابد) پس داریم:

x	۱	۵	۸	۱۰
y	$- x^2 - 1 $	$1 - x^2$	۲	۱۰

$$\rightarrow \underbrace{-|x^2 - 1| \leq 1 - x^2 \leq 2 \leq 10}_{(*)}$$

دقت کنید که $1 - x^2 \leq 2 \leq 10$ همواره برقرار است. پس فقط نامساوی $(*)$ را بررسی می‌کنیم.

$$-|x^2 - 1| \leq 1 - x^2 \Rightarrow |x^2 - 1| \geq x^2 - 1$$

چون $|t| \geq t$ همواره برقرار است، نامساوی بالا نیز همواره برقرار است، پس به‌ازای همه مقادیر x ، تابع f صعودی است.

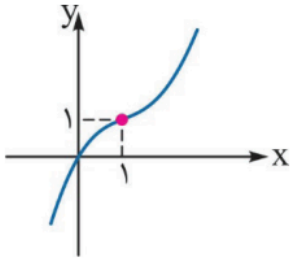
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

با توجه به شکل صورت سوال، $g(x) = 2x + 2$ است. حالا با داشتن تابع $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 2x + 1$ ضابطه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = 2x + 2 = t \Rightarrow x = \frac{t-2}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t-2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t-2}{2}\right) + 1 = (t-2)^2 + (t-2) + 1$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 2t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2$$



حالا سراغ تابع $y = xf(x)$ می‌رویم:

$$y = xf(x) = x(x^2 - 2x + 2) = x^3 - 2x^2 + 2x = (x-1)^2 + 1$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا تابع g را پیدا می‌کنیم، می‌دانیم $x + 2\sqrt{x-1} = (1 + \sqrt{x-1})^2$ است. پس:

$$g(x) = a\sqrt{(1 + \sqrt{x-1})^2} = a(1 + \sqrt{x-1})$$

از طرفی مطابق شکل صورت سوال، $g(1) = 1$ است، پس:

$$g(1) = a(1+0) = a = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow g(x) = 1 + \sqrt{x-1}$$

حالا سراغ پیدا کردن دامنه می‌رویم:

$$\begin{cases} D_f : 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ D_g : x \geq 1 \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1, 0 \leq 1 + \sqrt{x-1} \leq 2\}$$

چون عبارت $1 + \sqrt{x-1}$ همواره مثبت است، پس کافی است نامعادله $1 + \sqrt{x-1} \leq 2$ را حل کنیم:

$$\sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$$

بنابراین دامنه تابع $f \circ g$ به صورت بازه $[1, 2]$ است که شامل ۲ عدد صحیح است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۴

در ابتدا دقت می‌کنیم که دامنه $f(x)$ برابر $[2, +\infty)$ است پس برای دامنه $f(f(x)-1)$ داریم:

$$\begin{cases} (۱) & x \geq 2 \\ (۲) & f(x)-1 \geq 2 \rightarrow f(x) \geq 3 \rightarrow \sqrt{x-2}+2 \geq 3 \rightarrow \sqrt{x-2} \geq 1 \rightarrow x-2 \geq 1 \rightarrow x \geq 3 \end{cases}$$

که اشتراک آنها $x \geq 3$ (*) است.

و از طرفی برای دامنه $f(x-2)$ هم داریم:

$$x-2 \geq 2 \rightarrow x \geq 4 (**)$$

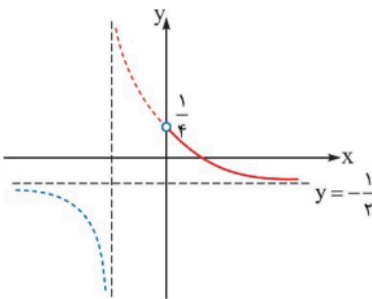
حالا دقت می‌کنیم که f تابعی اکیداً صعودی است پس از نامساوی $f(f(x)-1) > f(x-2)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} f(x)-1 > x-2 &\rightarrow f(x) > x-1 \rightarrow \sqrt{x-2}+2 > x-1 \\ &\rightarrow \sqrt{x-2} > x-3 \end{aligned}$$

با توجه به شرطهای (*) و (**) و خواسته سؤال برای اعداد صحیح فقط کافی است

اعداد صحیح ۴ به بعد را چک کنیم که $x=4$ درست است ولی از $x=5$ به بعد $x-3$ بزرگ‌تر است و تنها یک عدد صحیح در این رابطه صدق می‌کنند.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



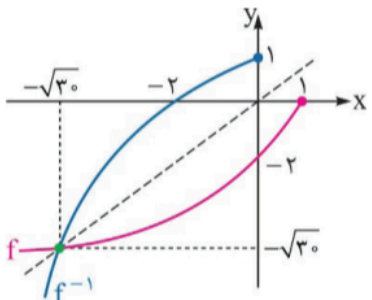
برد تابع $y=2^x$ برابر $(0, +\infty)$ است که در تابع fog، بازه $(0, +\infty)$ به عنوان ورودی تابع f در

نظر گرفته می‌شود. پس باید تابع $f(x) = \frac{1-x}{2x+4}$ را با دامنه $(0, +\infty)$ رسم کنیم:

$$\Rightarrow R_{fog} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

۷۵

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست آید.

۷۶

حالا با توجه به شکل، واضح است نمودار تابع f همواره زیر محور x یا روی آن است، پس $f(x) \leq 0$ است. بنابراین:

$$\frac{f(x)}{x-f^{-1}(x)} \geq 0 \xrightarrow{f(x) \leq 0} x-f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow x < f^{-1}(x)$$

واضح است نمودار تابع $f^{-1}(x)$ در بازه $[-\sqrt{3}, 0]$ بالای نمودار $y=x$ قرار دارد. پس مجموعه

جواب این نامعادله بازه $[-\sqrt{3}, 0]$ است که شامل اعداد صحیح $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۷

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون تابع خطی غیر ثابت $f(x)$ ، در معادله $y = f(x)$ را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و سپس با جابه‌جا کردن y و x ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

نکته: فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

تابع معکوس تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = -2x + 4 \Rightarrow 2x = 4 - y \Rightarrow x = \frac{4 - y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4 - x}{2}$$

برای به دست آوردن محل برخورد f و f^{-1} ، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow -2x + 4 = \frac{4 - x}{2} \Rightarrow -4x + 8 = 4 - x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -2\left(\frac{4}{3}\right) + 4 = \frac{4}{3} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$OA = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۸

نکته: اگر مؤلفه‌های اول و دوم همه زوج‌مرتبه‌های تابع $f(x)$ را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که به آن وارون f می‌گوییم و با $f^{-1}(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$\text{نکته: } f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

تابع خطی f را به صورت $f(x) = mx + h$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f^{-1}(2) = 5 \Rightarrow f(5) = 2 \Rightarrow A(5, 2) \in f$$

$$f(3) = -2 \Rightarrow B(3, -2) \in f$$

$$\begin{cases} A(5, 2) \\ B(3, -2) \end{cases} \Rightarrow m_{\text{شیب}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - (-2)}{5 - 3} = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + h$$

با قرار دادن مختصات یکی از نقاط A یا B در تابع، مقدار h را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + h \\ A(5, 2) \end{cases} \Rightarrow 2 = 10 + h \Rightarrow h = -8 \Rightarrow f(x) = 2x - 8 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 8}{2}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow 2x - 8 = \frac{x + 8}{2} \Rightarrow 4x - 16 = x + 8 \Rightarrow x = 8, y = 8$$

بنابراین $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ در نقطه $C(8, 8)$ با هم برخورد می‌کنند که مجموع طول و عرض آن برابر ۱۶ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۹

نکته: اگر هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک‌به‌یک است.

نمودار $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ یک سهمی روبه بالا است؛ زیرا ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر است.

بنابراین این تابع روی بازه $(-\infty, x_S]$ یا $[x_S, +\infty)$ یک‌به‌یک خواهد بود.

چون طبق فرض سؤال تابع روی بازه $(-\infty, m]$ یک‌به‌یک است، پس حداکثر مقدار m برابر x_S خواهد بود:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S = -\frac{4}{4} = -1 \Rightarrow m \leq -1$$

بنابراین حداکثر مقدار m برابر -1 می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: برای رسم تابع $y = f(x+k)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را به اندازه $|k|$ واحد روی محور x ها، انتقال دهیم. اگر $k > 0$ ، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ ، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم تابع $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت محور y ها انتقال دهیم.

چون نمودار $y = x^3$ ، سه واحد به چپ و دو واحد به بالا رفته است، پس ضابطه آن به صورت $y = (x+2)^3 + 2$ است.

$$y = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 2 = x^3 + 9x^2 + 27x + 29$$

بنابراین با مقایسه ضابطه تابع فوق با تابع $y = x^3 + ax^2 - bx + c$ داریم:

$$a = 9, \quad -b = +27 \Rightarrow b = -27, \quad c = 29$$

$$a + b + c = 9 - 27 + 29 = 11$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

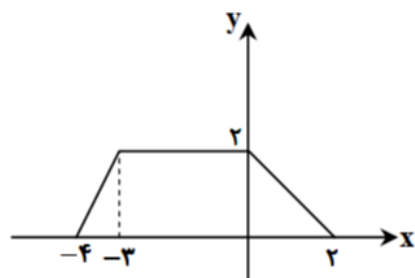
نکته: برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ ، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه k واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم؛ اگر $k > 0$ ، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ ، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

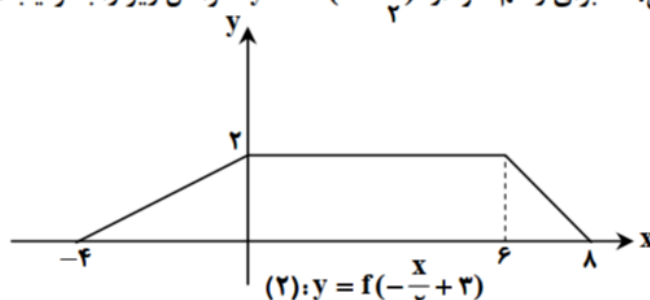
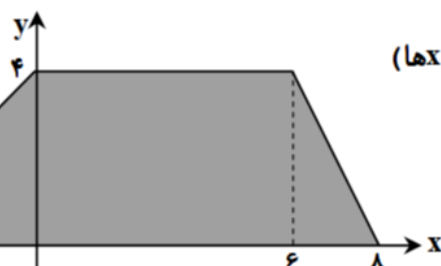
نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را بر k تقسیم کنیم؛ اگر $k > 1$ ، نمودار در راستای محور x ها انقباض می یابد و اگر $0 < k < 1$ ، نمودار در راستای محور x ها انبساط می یابد.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ ، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

راه حل اول: برای رسم نمودار $y = 2f(3 - \frac{x}{2})$ ، مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:



(۱): $y = f(x+3)$
(۳ واحد به سمت چپ)



(۲): $y = f(-\frac{x}{2} + 3)$
(قرینه نسبت به محور y ها، سپس انبساط در راستای محور x ها)

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} (6 + 12) \times 4 = 36$$

$$(۳): y = 2f(3 - \frac{x}{2})$$

(نمودار در راستای محور y ها منبسط می شود)

راه حل دوم:

در شکل دوزنقه ای با قاعده های ۳ و ۶ و ارتفاع ۲ مشخص شده است. $y = 2f(3 - \frac{x}{2})$ هم در راستای محور x ها با ضریب ۲ منبسط شده و

هم در راستای محور y ها با ضریب ۲ منبسط می شود، پس دوزنقه ای با قاعده های ۶ و ۱۲ و ارتفاع ۴ خواهیم داشت: $S = \frac{12+6}{2} \times 4 = 36$

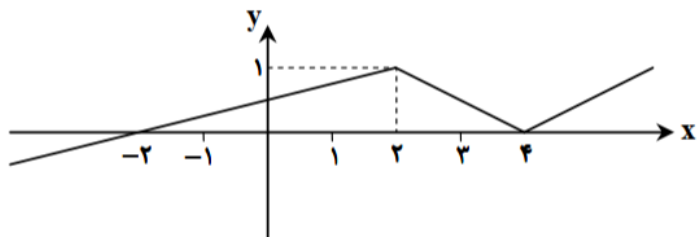
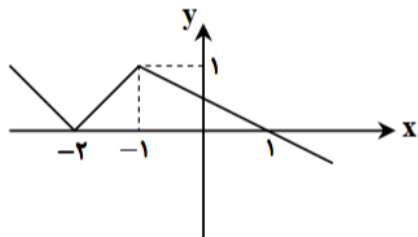
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۲

نکته: برای رسم نمودار $y = f(ax + b)$ ($0 < a < 1, b > 0$)، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را به اندازه b واحد در راستای محور x به سمت چپ منتقل نموده و سپس آن را با ضریب $\frac{1}{a}$ در راستای محور x ها منبسط می‌کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، باید نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x + 1)$ به دست آید:



حال نمودار حاصل را در راستای محور x ها با ضریب ۲ منبسط کرده، سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-\frac{x}{2} + 1)$ به دست آید:

با توجه به نمودار، تابع در بازه $[2, 4]$ نزولی است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۳

نکته: اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم.

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$$

توجه کنید گزینه ۲ اشتباه است؛ زیرا $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۴

نکته ۱: اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که:

$$(f \circ g)(x) = x \quad ; \quad x \in D_g \quad \text{الف}$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f \quad \text{ب}$$

آنگاه f و g وارون یکدیگرند.

نکته ۲: برای به دست آوردن ضابطه وارون تابع وارون پذیر $y = f(x)$ ، ابتدا x را بر حسب y به دست می‌آوریم. سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم. با توجه به نکته ۱، تابع g همان وارون f است. اکنون با توجه به نکته ۲، وارون تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$y = x^2 - 4x + 2 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x-2)^2 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+1} \xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y+1} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y+1}$$

بنابراین ضابطه g که همان f^{-1} است، عبارت است از: $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

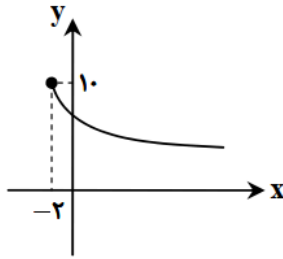
۸۵

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، داریم:

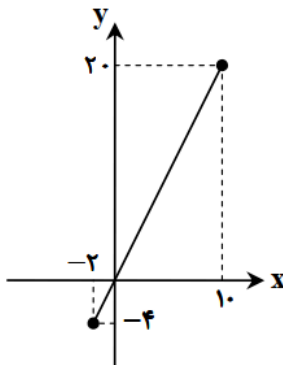
$$(f \circ f^{-1})(x) = x ; x \in D_{f^{-1}} = R_f , \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x ; x \in D_f$$

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، دامنه تابع $f + g$ برابر $D_f \cap D_g$ است.

مطابق نکته، ضابطه تابع $y = (f \circ f^{-1})(x) + (f^{-1} \circ f)(x)$ برای هر تابع وارون پذیر f به صورت $y = 2x$ است. همچنین دامنه آن برابر $D_f \cap D_{f^{-1}}$ است که همان اشتراک دامنه و برد تابع f است.



با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $R_f = (-\infty, 10]$ و $D_f = [-2, +\infty)$



پس دامنه تابع موردنظر برابر $[-2, 10]$ است. بنابراین نمودار آن به شکل مقابل است:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۶

نکته: در تابع وارون پذیر f داریم: $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

نکته: اگر f و g توابعی وارون پذیر باشند، داریم: $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 2, g(x) = x^3 + 1$$

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(m) = 3 \Rightarrow (g^{-1} \circ f)(m) = 3 \Rightarrow g^{-1}(f(m)) = 3 \Rightarrow g(3) = f(m) \Rightarrow 3^3 + 1 = \frac{1}{3}m - 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}m = 30 \Rightarrow m = 90$$

$$f^{-1}\left(\frac{m}{10}\right) = f^{-1}\left(\frac{90}{10}\right) = f^{-1}(9) = k \Rightarrow f(k) = 9 \Rightarrow \frac{1}{3}k - 2 = 9 \Rightarrow k = 33$$

می‌یابیم: $m = 90$ را به‌ازای $f^{-1}\left(\frac{m}{10}\right)$ حاصل

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\text{نکته: } f(f^{-1}(x)) = x$$

۸۷

نکته: تابع f را اکیداً صعودی نامیم هرگاه: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$

با توجه به تعریف تابع اکیداً صعودی به حل نامعادله موردنظر می‌پردازیم:

$$f^{-1}(x^2) < f^{-1}(5x+6) \Rightarrow f(f^{-1}(x^2)) < f(f^{-1}(5x+6)) \Rightarrow x^2 < 5x+6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 < 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) < 0$$

x	-1	6
$x^2 - 5x - 6$	$+$	$-$

$$\Rightarrow -1 < x < 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۸

نکته: اگر تابع وارون تابع f باشد، داریم: $f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$

$$g(7) = k \Rightarrow f(k) = 7 \Rightarrow \sqrt{k-1} + k = 7 \quad (۱)$$

با توجه به نکته فوق، $g(7)$ و $g(13)$ را محاسبه می‌کنیم:

با فرض $\sqrt{k-1} = t$ داریم:

$$k-1 = t^2 \Rightarrow k = t^2 + 1 \xrightarrow{(۱)} t + t^2 + 1 = 7 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \Rightarrow \sqrt{k-1} = -3 & \text{غ ق ق} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{k-1} = 2 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow g(7) = 5 \end{cases}$$

$$g(13) = m \Rightarrow f(m) = 13 \Rightarrow \sqrt{m-1} + m = 13 \quad (۲)$$

باز از تغییر متغیر $\sqrt{m-1} = t$ استفاده می‌کنیم:

$$m = t^2 + 1 \xrightarrow{(۲)} t + t^2 + 1 = 13 \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -4 \Rightarrow \sqrt{m-1} = -4 & \text{غ ق ق} \\ t = 3 \Rightarrow \sqrt{m-1} = 3 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow g(13) = 10 \end{cases}$$

$$g(7) - g(13) = 5 - 10 = -5$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۹

نکته: اگر برد یک تابع فقط شامل یک عضو باشد، آن تابع را ثابت گوییم.

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو دامنه به همان عضو در برد تابع نسبت داده شود، یا به عبارت دیگر برای تمام اعضای دامنه

$y = x$ باشد، آن تابع را همانی می‌گوییم.

چون $f(x)$ تابعی همانی است، پس مقدار ورودی و خروجی برابر است، یعنی $f(x) = x$ ، پس $f(2) = 2$ و $f(3) = 3$ می‌باشد.

چون $g(x)$ تابعی ثابت است، پس خروجی تابع عدد ثابت k می‌باشد، پس $g(x) = k$ و $g(3) = g(\sqrt{2}) = k$ ، بنابراین داریم:

$$\delta + 2k = 3 + k \Rightarrow 2k - k = 3 - \delta \Rightarrow k = -2 \Rightarrow g(\sqrt{5}) = -2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۰

نکته: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ و $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

مطابق ضابطه‌های داده شده برای f و g داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ ، $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ و $g(1) = 0$ ، پس دامنه تابع $\frac{f}{g}$ به صورت

$\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ می‌باشد. ضابطه این تابع برابر است با:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x+4$$

برد تابع خطی $y = x+4$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2+4, 1+4\}$ است، یعنی: $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2, 5\}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۱ برای اینکه رابطه داده شده تابع نباشد، باید مؤلفه اول زوج مرتب‌های اول و دوم یا اول و سوم یا دوم و سوم با هم برابر باشند ولی مؤلفه دوم آن‌ها برابر نباشند، پس داریم:

$$۱) m = 2m + 1 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow f = \{(-1, -4), (-1, -4), (-5, -1)\} \text{ تابع است.}$$

$$۲) m = 3m - 2 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f = \{(1, 0), (3, 2), (1, 1)\} \text{ تابع نیست.}$$

$$۳) 2m + 1 = 3m - 2 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow f = \{(3, 4), (7, 8), (7, 3)\} \text{ تابع نیست.}$$

اگر $m = 1$ یا $m = 3$ باشد، رابطه داده شده تابع نیست ولی برای سایر مقادیر m تابع است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۲ فقط دو تابع خطی مانند f می‌توان یافت، زیرا اگر $f(x) = ax + b$ ضابطه این تابع باشد، دو حالت زیر امکان پذیر است:

$$\text{الف) } \begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(2) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\text{پس: } f(x) = 2x + 5$$

$$\text{ب) } \begin{cases} f(-1) = 9 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 9 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$\text{پس: } f(x) = -2x + 7$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۳ تابع f همانی است. پس ضابطه آن به صورت $f(x) = x$ است.

$$f(x) = (2x + a)^2 - bx^2 + c = 4x^2 + 4ax + a^2 - bx^2 + c = (4 - b)x^2 + 4ax + (a^2 + c)$$

برای آنکه عبارت به دست آمده همان $f(x) = x$ باشد، می‌بایست:

$$\begin{cases} 4 - b = 0 \Rightarrow b = 4 \\ 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ a^2 + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

برای آنکه تابع g ثابت باشد، می‌بایست عبارت شامل x از صورت و مخرج ساده شود:

$$g(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{\frac{1}{4}x + 4}{-\frac{1}{16}x + d} = \frac{\frac{1}{4}(x + 16)}{-\frac{1}{16}(x - 16d)}$$

$$\text{پس } d = -1, x + 16 = x - 16d$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۴ اگر $2 - b \neq 0$ باشد، f یک سهمی است و روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست. پس باید ضریب x^2 برابر صفر باشد، یعنی:

$$2 - b = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = (2 - a)x + 2$$

برای اینکه f اکیداً صعودی باشد، باید ضریب x عددی مثبت باشد، بنابراین:

$$2 - a > 0 \Rightarrow a < 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

حال دامنه تابع خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \sqrt{2ax - 3f(x)} = \sqrt{2x - 3x - 6} = \sqrt{-x - 6} \Rightarrow -x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq -6 \Rightarrow D_g = (-\infty, -6]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۵

ابتدا ضابطه g را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = f(x-k) - f(x) + \lambda x \xrightarrow{f(x)=2x^2-6x} g(x) = 2(x-k)^2 - 6(x-k) - 2x^2 + 6x + \lambda x$$

$$g(x) = 2x^2 + 2k^2 - 4kx - 6x + 6k - 2x^2 + 6x + \lambda x \Rightarrow g(x) = (\lambda - 4k)x + 2k^2 + 6k$$

برای اینکه g تابعی ثابت باشد، باید $k = 2$ و در نتیجه $g(x) = 20$.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۶

 f تابعی خطی و نزولی اکید است، پس $a < 0$ و $f(x) = ax + b$ حال ضابطه $(f \circ f)(x)$ و سپس ضابطه $(f \circ f)(2x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f \circ f)(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b \Rightarrow (f \circ f)(2x) = 2a^2x + ab + b = \lambda x + 1$$

اکنون داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = \lambda \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a < 0} \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \\ ab + b = 1 \xrightarrow{a = -2} -b = 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ \checkmark \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x) = -2x - 1 \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow f(2 + f(1)) = f(1) = -3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۷

چون دامنه تابع f بازه $[-2, 4]$ است، داریم:

$$y = f(3 - 4x) \Rightarrow (3 - 4x) \in D_f \Rightarrow -2 \leq 3 - 4x \leq 4 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$y = f(3x - 4) \Rightarrow (3x - 4) \in D_f \Rightarrow -2 \leq 3x - 4 \leq 4 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{8}{3} \quad (2)$$

حال نامعادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$f(3 - 4x) < f(3x - 4) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} 3 - 4x > 3x - 4 \Rightarrow 7x < 7 \Rightarrow x < 1 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۸

چون $f \circ g$ و g هر دو چندجمله‌ای درجه دوم هستند، پس f یک چندجمله‌ای درجه اول است. با فرض $f(x) = ax + b$ ، داریم:

$$f \circ g(x) = f((x-1)^2 + 2) = f(x^2 - 2x + 3) \Rightarrow f \circ g(x) = a(x^2 - 2x + 3) + b \Rightarrow ax^2 - 2ax + 3a + b = 3x^2 - 6x + 14$$

برای برقراری رابطه بالا داریم:

$$\begin{cases} a = 3 \\ 3a + b = 14 \end{cases} \xrightarrow{a=3} b = 5 \Rightarrow f(x) = 3x + 5$$

$$f \circ f(3) = f(f(3)) = f(14) = 47$$

حال مقدار خواسته شده سؤال را به دست می‌آوریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2 + \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_f = [-3, 3]$$

$$g(x) = 1 + 2\sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_g = [-1, +\infty)$$

بنابراین:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, 3]$$

اکنون دامنه تابع $(f+g) \circ g$ را به دست می آوریم:

$$D_{(f+g) \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_{f+g}\} = \underbrace{\{x \in [-1, +\infty) \mid g(x) \in [-1, 3]\}}_{(1)}$$

$$-1 \leq 1 + 2\sqrt{x+1} \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\sqrt{x+1} \geq -1 & \text{بدیهی} \\ 1 + 2\sqrt{x+1} \leq 3 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 1 \Rightarrow x \leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow D_{(f+g) \circ g} = [-1, 0]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

می خواهیم ضابطه f را پیدا کنیم. می دانیم $g(x) = \frac{x-1}{x}$ ، پس $g(f) = \frac{f-1}{f}$. ضمناً با توجه به اینکه $(g \circ f)(x) = \frac{2x+1}{x}$ ، داریم:

$$g \circ f = g(f) \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = \frac{f-1}{f} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = 1 - \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = 1 - \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{x-2x-1}{x} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{-x-1}{x} \\ \Rightarrow f = \frac{x}{-x-1} \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x+1}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست می آوریم:

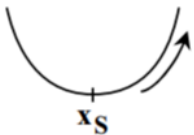
$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2-3x) = 2(2-3x)^2 + a(2-3x) - 1$$

$$\Rightarrow y = (f \circ g)(x) = 18x^2 - 24x - 3ax + 8 + 2a - 1 = 18x^2 - x(2a + 24) + 2a + 7$$

باید سهمی به دست آمده در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً یکنوا باشد، پس باید $x_S \leq 2$: بنابراین:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \leq 2 \Rightarrow \frac{2a+24}{36} \leq 2$$

$$\Rightarrow a+8 \leq 24 \Rightarrow a \leq 16$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۲

با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، تابع f را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c|c|c} x & & 2 \\ \hline 2x-4 & - & + \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \Rightarrow |2x-4| = -2x+4 \\ x \geq 2 \Rightarrow |2x-4| = 2x-4 \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} (2a+6)x-12 & x \geq 2 \\ (2a-6)x+12 & x < 2 \end{cases}$$

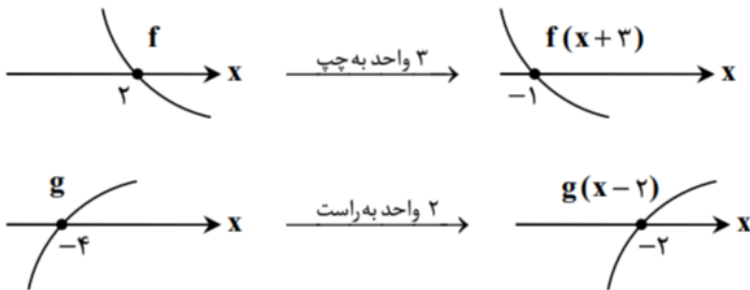
برای اینکه تابع f اکیداً نزولی باشد، باید شیب هر دو ضابطه منفی باشد، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 2a+6 < 0 \Rightarrow a < -3 \\ 2a-6 < 0 \Rightarrow a < 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} a < -3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۳

ابتدا نموداری فرضی برای f و g و سپس $f(x+3)$ و $g(x-2)$ رسم می‌کنیم:



برای به دست آوردن دامنه تابع h ، نامعادله $\frac{f(x+3)}{g(x-2)} \geq 0$ را حل می‌کنیم.

با توجه به نمودارهای رسم شده داریم:

x		-2	-1	
$f(x+3)$	+		+	-
$g(x-2)$	-		+	+
$\frac{f(x+3)}{g(x-2)}$	-		+	-

$$\Rightarrow D_h = (-2, -1]$$

پس دامنه تابع h شامل یک عدد صحیح است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۴

نکته: مجموعه مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های یک تابع را دامنه می‌گویند.

نکته: مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های یک تابع را برد می‌گویند.

برای اینکه f تابع باشد، باید هر زوج مرتبی که مؤلفه اول یکسان دارد، مؤلفه دوم یکسان نیز داشته باشد.

از طرفی دامنه تابع $\{1, 2, 3\}$ است، پس a دارای ۳ مقدار خواهد بود:

$$\begin{array}{ll} a=1 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 2), (3, 2)\} \Rightarrow R = \{4, 2\} & \text{گزینه ۱} \\ a=2 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 2)\} \Rightarrow R = \{4, 2\} & \text{گزینه ۲} \\ a=3 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 2), (3, 4)\} \Rightarrow R = \{4, 2\} & \text{گزینه ۳} \end{array}$$

بنابراین گزینه ۴ نمی‌تواند برد تابع باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

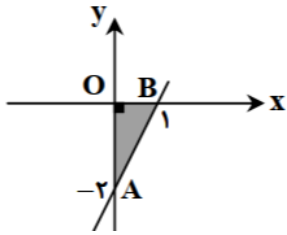
۱۰۵

نکته: هر تابع به فرم $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌گوییم.

$$f(x) = 2x - b$$

$$f(b+2) = f(2) + f(3) \Rightarrow 2(b+2) - b = 2(2) - b + 2(3) - b \Rightarrow 2b + 4 - b = 4 - 2b \Rightarrow 3b = 6$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(0, -2) \\ y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 0) \end{cases}$$



با رسم تابع واضح است که پاره خط AB وتر مثلث OAB است؛ بنابراین:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow 4 + 1 = AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۶

نکته: هر تابع به فرم $y = k$ که $k \in \mathbb{R}$ یک تابع ثابت است.نکته: هر تابع به فرم $f(x) = ax + b$ یک تابع خطی است.

$$g(x) = \frac{ax + b + 2x}{4 + 2ax + 2b} \Rightarrow g(x) = \frac{(a+2)x + b}{2ax + 2b + 4}$$

f تابعی خطی است، پس $f(x) = ax + b$ ، به این ترتیب داریم:

برای آنکه تابع g ثابت باشد یا باید ضریب x در صورت و مخرج همزمان صفر شود که امکان پذیر نیست یا اینکه صورت و مخرج عاملی از x داشته باشند که با هم ساده شوند، پس:

$$\frac{a+2}{2a} = \frac{b}{2b+4} \Rightarrow 2ab + 4a + 4b + 8 = 2ab \Rightarrow 4a + 4b = -8 \Rightarrow a + b = -2$$

$$f(1) = a + b \Rightarrow f(1) = -2$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۷

نکته: هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود. ضابطه تابع مقابل از ۳ ضابطه مختلف تشکیل شده است. برای پیدا کردن a طبق نمودار از

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

f(-2) = 0 استفاده می‌کنیم:

$$f(0) = 3 \Rightarrow A(0, 3)$$

ضابطه اول و دوم در نقطه A با هم برخورد کرده‌اند، پس:

$$A(0, 3) \in y = -x + b \Rightarrow 3 = 0 + b \Rightarrow b = 3$$

$$B(c, -4) \in y = -x + 3 \Rightarrow -4 = -c + 3 \Rightarrow c = 7$$

ضابطه دوم و سوم در نقطه B(c, -4) با هم برخورد کرده‌اند، پس:

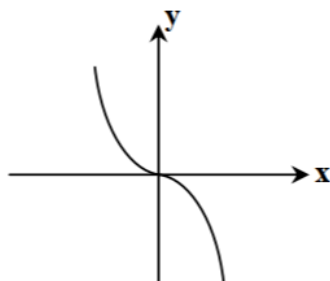
$$a + bc = \frac{3}{2} + 3 \times 7 = 22\frac{1}{2}$$

بنابراین:

دقت کنید که طبق دامنه‌ها، نقطه A در ضابطه اول است و در ضابطه دوم نیست، ولی اگر دامنه را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، این نقطه روی خط ضابطه دوم قرار دارد، پس برای به دست آوردن مقادیر مجهول می‌توان از آن استفاده کرد.

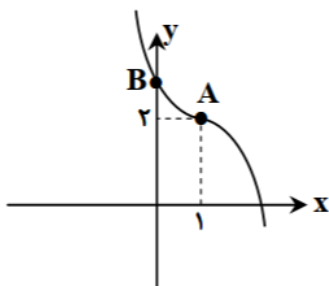
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۸

نکته: نمودار $f(x) = -x^3$ به صورت مقابل است.با استفاده از اتحاد $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$y = -(x^3 - 3x^2 + 3x) + 3 = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1) + 3$$

$$y = -(x-1)^3 - 1 + 3 = -(x-1)^3 + 2$$

برای رسم $y = -(x-1)^3 + 2$ ، تابع $f(x) = -x^3$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.بنابراین مختصات نقاط A و B به صورت زیر است: $A(1, 2)$, $x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(0, 2) \Rightarrow AB = \sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{2}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۹

نکته (تابع نزولی): اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

با توجه به تعریف تابع نزولی داریم:

$$-3 < -2 \Rightarrow f(-3) \geq f(-2) \Rightarrow 1 - 5m \geq m + 4 \Rightarrow 6 \geq 6m \Rightarrow m \leq 1 \quad (1)$$

$$-2 < 1 \Rightarrow f(-2) \geq f(1) \Rightarrow m + 4 \geq m^2 - 2 \Rightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq 3 \quad (2)$$

اشتراک دو محدوده (۱) و (۲) به دست آمده برابر $-2 \leq m \leq 1$ است.توجه کنید لازم نیست نامعادله $f(-3) \geq f(1)$ حل شود؛ زیرا دو نامعادله $f(-3) \geq f(-2)$ و $f(-2) \geq f(1)$ حل شده است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۰

نکته: دامنه تابع fog برابر است با: $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

دامنه تابع g برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است، پس:

$$D_{fog} = \{x \neq 0 \mid g(x) \geq 2/25\} \quad (*)$$

برای حل نامعادله $g(x) \geq 2/25$ داریم:

$$\frac{x^2 + 5}{x^2} \geq 2/25 \Rightarrow 1 + \frac{5}{x^2} \geq \frac{2}{25} \Rightarrow \frac{5}{x^2} \geq \frac{2}{25} - 1 \Rightarrow \frac{5}{x^2} \geq \frac{2}{25} - \frac{25}{25} \Rightarrow \frac{5}{x^2} \geq \frac{-23}{25} \Rightarrow \frac{5}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - x^2}{4x^2} \geq 0$$

x	-2	0	2
$4 - x^2$	-	+	-
$4x^2$	+	+	+
$\frac{4 - x^2}{4x^2}$	-	+	-

تن

$\Rightarrow x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$

با جایگذاری در (*) داریم:

$$D_{fog} = \{x \neq 0 \mid x \in [-2, 0) \cup (0, 2]\} = [-2, 0) \cup (0, 2]$$

واضح است که D_{fog} تنها شامل ۴ عدد صحیح $(\pm 2, \pm 1)$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\text{نکته: } (fog)(x) = f(g(x))$$

راه حل اول:

f تابعی وارون پذیر و یک به یک است، پس از تساوی $f(f(x)) = f(x)$ می توان نتیجه گرفت $f(x) = x$ ، پس:

$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x-4} + 4 = x \Rightarrow \sqrt{x-4} = x-4 \Rightarrow x-4 = (x-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x-4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=5 \end{cases}$$

هر دو ریشه به دست آمده قابل قبول بوده و مجموع آنها برابر ۹ است.

$$\text{راه حل دوم: } (f \circ f)(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt{f(x)-4} + 4 = f(x) \Rightarrow \sqrt{\sqrt{x-4} + 4 - 4} + 4 = \sqrt{x-4} + 4 \Rightarrow \sqrt[3]{x-4} = \sqrt{x-4}$$

$$\Rightarrow (x-4) = (x-4)^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = x - 4 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=5 \end{cases}$$

مجموع ریشه های معادله بالا برابر ۹ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\text{نکته: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

با توجه به ضابطه تابع g داریم:

$$g(x) = \frac{x-1}{3-x} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{f(x)-1}{3-f(x)}$$

همچنین با توجه به ضابطه داده شده برای تابع g، داریم:

$$\frac{f(x)-1}{3-f(x)} = \frac{-x^2}{3x^2+2} \Rightarrow 3x^2 f(x) - 3x^2 + 2f(x) - 2 = -3x^2 + x^2 f(x) \Rightarrow 2x^2 f(x) + 2f(x) = 2$$

$$\Rightarrow (2x^2 + 2)f(x) = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۲

۱۱۳

نکته: اگر دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت $D_f = [a, b]$ باشد، دامنه تابع $y = f(u)$ از حل نامعادله $a \leq u < b$ حاصل می شود.

نکته: دامنه تابع $f - g$ برابر است با: $D_f \cap D_g$

ابتدا دامنه دو تابع $f(3x)$ و $f(-x)$ را پیدا می کنیم:

$$D_{f(x)} = [-9, 2] \xrightarrow{f(3x)} -9 \leq 3x < 2 \Rightarrow -3 \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow D_{f(3x)} = [-3, \frac{2}{3})$$

$$D_{f(x)} = [-9, 2] \xrightarrow{f(-x)} -9 \leq -x < 2 \Rightarrow 9 \geq x > -2 \Rightarrow D_{f(-x)} = (-2, 9]$$

$$D = [-3, \frac{2}{3}) \cap (-2, 9] = (-2, \frac{2}{3}) \quad y = |f(3x) - f(-x)| \text{ برابر اشتراک دامنه دو تابع } f(3x) \text{ و } f(-x) \text{ است، پس:}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۴

نکته: اگر دامنه تابع f به صورت $D_f = [a, b]$ باشد، برای تعیین دامنه تابع $y = f(u)$ باید نامعادله $a \leq u \leq b$ را حل کنیم.

نکته: برد توابع $y = f(x)$ و $y = f(ax + b)$ یکسان است.

از روی نمودار تابع f ، دامنه و برد آن را مشخص می کنیم.

$$D_f = [-2, 3] \quad , \quad R_f = [-1, 4]$$

حال دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(\frac{1}{3}x - 1) + 3$ را می یابیم.

$$-2 \leq \frac{1}{3}x - 1 \leq 3 \xrightarrow{+1} -1 \leq \frac{1}{3}x \leq 4 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq x \leq 12 \Rightarrow D_g = [-3, 12]$$

برد $f(x)$ و $f(\frac{1}{3}x - 1)$ یکسان است، پس:

$$-1 \leq f(\frac{1}{3}x - 1) \leq 4 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2f(\frac{1}{3}x - 1) \leq 8 \xrightarrow{+3} 1 \leq 2f(\frac{1}{3}x - 1) + 3 \leq 11$$

$$\Rightarrow 1 \leq g(x) \leq 11 \Rightarrow R_g = [1, 11]$$

اشتراک دامنه و برد تابع g به صورت زیر است:

$$D_g \cap R_g = [-3, 12] \cap [1, 11] = [1, 11]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.

نکته: نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

نکته: نمودار تابع $y = f(x) + k$ از انتقال نمودار تابع $y = f(x)$ به اندازه $|k|$ واحد در راستای عمودی حاصل می‌شود. اگر $k > 0$ ، انتقال در جهت بالا و اگر $k < 0$ ، انتقال در جهت پایین می‌باشد.

نکته: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x ‌هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ‌ها رسم کنیم.

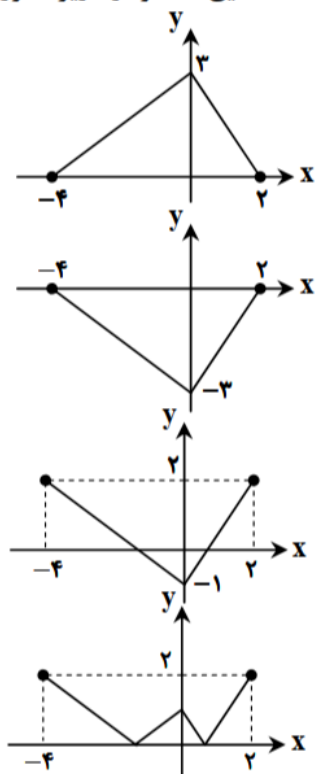
ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-x)$ به دست آید.

سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده تا $y = -f(-x)$ به دست آید.

در ادامه آن را ۲ واحد بالا می‌بریم تا نمودار $y = 2 - f(-x)$ به دست آید.

برای رسم $y = |2 - f(-x)|$ قسمتی از تابع که زیر محور طول‌ها است را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.

این نمودار در گزینه ۳ به درستی رسم شده است.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 0$ ، نمودار $y = f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها به‌دست آورد.

اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ اگر $k > 0$ ، نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به چپ منتقل می‌کنیم و برای $k < 0$ این انتقال به‌اندازه $|k|$ واحد به راست انجام می‌شود.

نکته: نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

در اثر قرینه کردن تابع $f(x) = \sqrt{x}$ نسبت به محور عرض‌ها تابع $f(-x) = \sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر این تابع را 8 واحد به راست منتقل کنیم، تابع $f(-(x-8)) = \sqrt{-(x-8)}$ به‌دست می‌آید و اگر تابع را در راستای افقی سه برابر منبسط کنیم، تابع

$$f\left(-\left(\frac{x}{3}-8\right)\right) = \sqrt{-\frac{x}{3}+8}$$

برای یافتن طول محل تلاقی دو نمودار ضابطه آن‌ها را با هم مساوی می‌گذاریم:

$$\sqrt{x} = \sqrt{-\frac{x}{3}+8} \Rightarrow x = -\frac{x}{3}+8 \Rightarrow x + \frac{x}{3} = 8 \Rightarrow \frac{4x}{3} = 8 \Rightarrow x = 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: برای رسم نمودار $y = f(kx)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است طول نقاط نمودار $f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k < 0$ باشد، نمودار نسبت به محور y ها قرینه می‌شود و سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

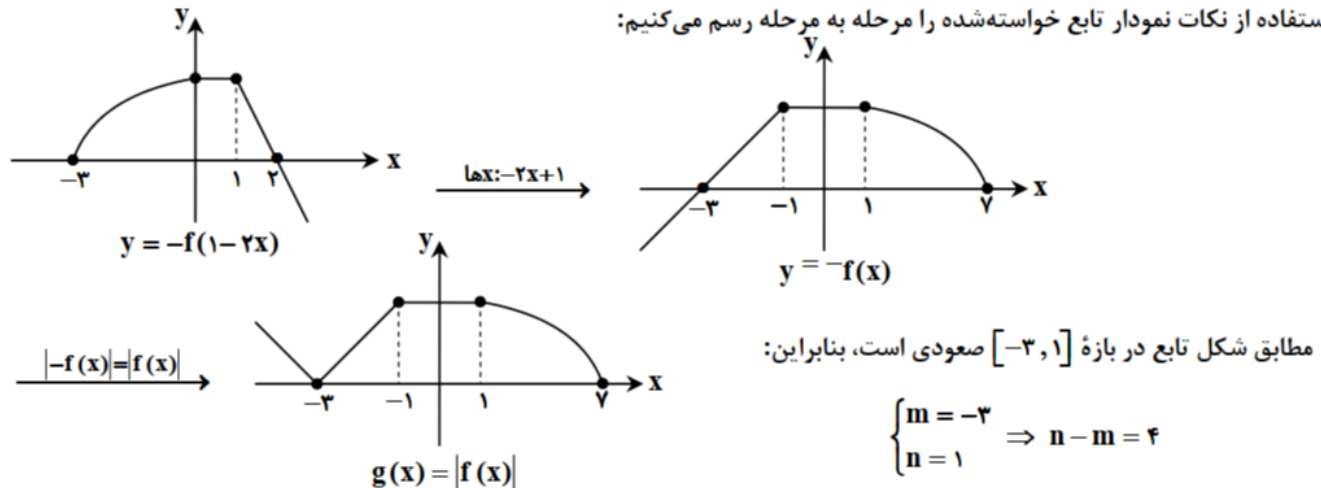
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را به‌اندازه $|k|$ واحد به سمت راست ($k < 0$) یا به سمت چپ ($k > 0$) انتقال دهیم.

نکته: برای رسم نمودار $f(x)$ از روی نمودار $g(x) = f(ax+b)$ کافی است طول نقاط روی نمودار $g(x)$ را در a ضرب کرده و با b جمع کنیم:

$$f(ax+b) \Rightarrow \frac{x}{a} \Rightarrow f\left(a\left(\frac{x}{a}\right)+b\right) = f(x+b) \Rightarrow x-b \Rightarrow f(x-b+b) = f(x)$$

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است قسمت‌هایی از نمودار تابع $y = f(x)$ که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم. با استفاده از نکات نمودار تابع خواسته‌شده را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

دامنه تابع $y = a + b\sqrt{x+c}$ ، از حل نامعادله $x+c \geq 0$ ، به صورت $D = [-c, +\infty)$ به دست می‌آید. از طرفی با توجه به نمودار، دامنه تابع به صورت $[-4, +\infty)$ است؛ پس $c = 4$. تابع از نقطه $(-4, 3)$ می‌گذرد؛ بنابراین:

$$y = a + b\sqrt{x+4} \xrightarrow{(-4, 3)} 3 = a$$

همچنین تابع رادیکالی از مبدأ مختصات یعنی نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد؛ پس:

$$y = 3 + b\sqrt{x+4} \xrightarrow{(0, 0)} 0 = 3 + b\sqrt{4} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$abc = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times 4 = -18$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا ضابطه f را به صورت مربع کامل می نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$$

با توجه به ضابطه تابع g و محدوده x ، داریم:

$$1) -2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow g(x) = 5 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = 5(x-1)^2 - 20$$

اکنون برد تابع $f \cdot g$ را با توجه به محدوده x به دست می آوریم:

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow -3 \leq x-1 < -2 \Rightarrow 4 < (x-1)^2 \leq 9 \Rightarrow 20 < 5(x-1)^2 \leq 45 \Rightarrow 0 < 5(x-1)^2 - 20 \leq 25 \\ \Rightarrow 0 < (f \cdot g)(x) \leq 25 \quad (1)$$

$$2) -1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow g(x) = 4 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = 4(x-1)^2 - 16$$

مشابه قسمت اول داریم:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow -2 \leq x-1 < -1 \Rightarrow 1 < (x-1)^2 \leq 4 \Rightarrow 4 < 4(x-1)^2 \leq 16 \Rightarrow -12 < 4(x-1)^2 - 16 \leq 0 \\ \Rightarrow -12 < (f \cdot g)(x) \leq 0 \quad (2)$$

پس برد تابع $f \cdot g$ شامل ۳۷ عدد صحیح است.

$$(1) \cup (2) \Rightarrow -12 < (f \cdot g)(x) \leq 25 \Rightarrow R_{f \cdot g} = (-12, 25]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 35}{2x - 14} = \frac{(x-7)(x-5)}{2(x-7)} = \frac{x-5}{2} \quad (x \neq 7)$$

اکنون وارون تابع $f(x) = \frac{x-5}{2}$ با دامنه $D_f = \mathbb{R} - \{7\}$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} y = \frac{x-5}{2} \Rightarrow x-5 = 2y \Rightarrow x = 2y+5 \\ x \neq 7 \Rightarrow y \neq \frac{7-5}{2} \Rightarrow y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x+5, D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

تابع g با تابع f^{-1} مساوی است، پس: $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$$x+k \neq 0 \Rightarrow x \neq -k \xrightarrow{x \neq 1} -k = 1 \Rightarrow k = -1$$

ضمناً ضابطه دو تابع با یکدیگر برابر است، پس:

$$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x^2 + mx + n}{x-1} = 2x+5 \Rightarrow 2x^2 + mx + n = (2x+5)(x-1) \Rightarrow 2x^2 + mx + n = 2x^2 + 3x - 5$$

بنابراین $m = 3$ و $n = -5$ و مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{mn}{k} = \frac{3 \times (-5)}{-1} = 15$$

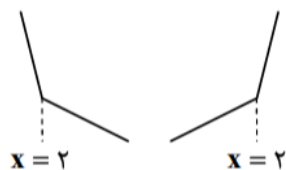
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۱

تابع f را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x \leq 2 \Rightarrow |x-2| = -x+2 \\ x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x+2-ax & x \leq 2 \\ x-2-ax & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(-a-1)+2 & x \leq 2 \\ x(1-a)-2 & x > 2 \end{cases}$$

برای اینکه f یک‌به‌یک باشد، باید شیب هر دو ضابطه خطی به دست آمده، هم‌علامت باشند تا نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر باشد:



بنابراین:

$$(-a-1)(1-a) > 0 \Rightarrow (a+1)(1-a) < 0 \Rightarrow 1-a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow a > 1 \text{ یا } a < -1 \Rightarrow a \in \mathbb{R} - [-1, 1]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۲

ابتدا تابع f را به یک تابع سه‌ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \leq -1 \Rightarrow y = 3(-x-1) - (-x+4) = -2x-7 \\ -1 < x < 4 \Rightarrow y = 2(x+1) - (-x+4) = 3x-2 \Rightarrow f(x) = \\ x \geq 4 \Rightarrow y = 3(x+1) - (x-4) = 2x+7 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x-7 & x \leq -1 \\ 3x-2 & -1 < x < 4 \\ 2x+7 & x \geq 4 \end{cases}$$

پس تابع f در بازه $[-1, -\infty)$ با ضابطه $y = -2x-7$ اکیداً نزولی است. اکنون وارون این ضابطه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = -2x-7 \Rightarrow y+7 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}(y+7) \\ x \leq -1 \Rightarrow -2x \geq 2 \Rightarrow -2x-7 \geq -5 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x+7), x \geq -5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۳

دامنه تابع f ، مجموعه اعداد حقیقی است و داریم:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < |2x-3| \leq 7\}$$

نامساوی $-5 < |2x-3|$ همواره برقرار است. پس باید فقط نامعادله زیر را حل کنیم:

$$|2x-3| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x-3 \leq 7 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 10 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

$$5 - (-2) = 7$$

پس $D_{\text{gof}} = [-2, 5]$ و طول این بازه برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۴ ابتدا ضابطه توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$x+1=t \Rightarrow x=t-1$$

$$f(x+1)=\sqrt{3-x} \Rightarrow f(t)=\sqrt{3-(t-1)}=\sqrt{-t+4} \Rightarrow f(x)=\sqrt{-x+4}$$

$$2-x=t \Rightarrow x=2-t$$

$$g(2-x)=\sqrt{x-3} \Rightarrow g(t)=\sqrt{2-t-3}=\sqrt{-t-1} \Rightarrow g(x)=\sqrt{-x-1}$$

اکنون دامنه f و g و سپس دامنه $f \circ g$ را به دست می آوریم:

$$D_f: -x+4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4, \quad D_g: -x-1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \leq -1 \mid \sqrt{-x-1} \leq 4\}$$

$$\sqrt{-x-1} \leq 4 \Rightarrow -x-1 \leq 16 \Rightarrow x \geq -17 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -17 \leq x \leq -1 \Rightarrow D_{f \circ g} = [-17, -1]$$

پس دامنه تابع $f \circ g$ شامل ۱۷ عدد صحیح است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۵ ابتدا عبارت $x^3 - \frac{8}{x^3}$ را بر حسب $x - \frac{2}{x}$ نوشته و ضابطه تابع $y = f(x)$ را پیدا می کنیم:

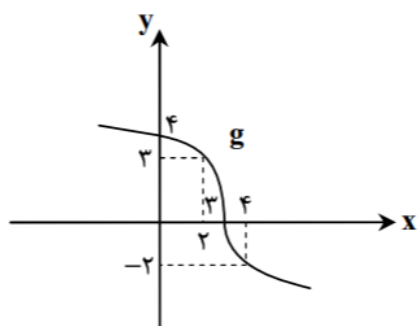
$$\begin{aligned} x^3 - \frac{8}{x^3} &= x^3 - \left(\frac{2}{x}\right)^3 = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + x \times \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2\right) = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 + 2x \times \frac{2}{x} + 2\right) \\ &= \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 + 6\right) \end{aligned}$$

$$f(2) = 2 \times (2^2 + 6) = 2 \times 10 = 20$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x(x^2 + 6)$ است و داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۶ با توجه به نکته و فرض سؤال داریم:



$$(g \circ f \circ g)(x+2) = 0 \Rightarrow g(g(f(x+2))) = 0$$

با توجه به نمودار داده شده، $g(3) = 0$ و $g(2) = 3$ بنابراین:

$$g(g(f(x+2))) = 0 \xrightarrow{g(2)=3} g(f(x+2)) = 3 \xrightarrow{g(3)=0} f(x+2) = 2$$

اکنون داریم:

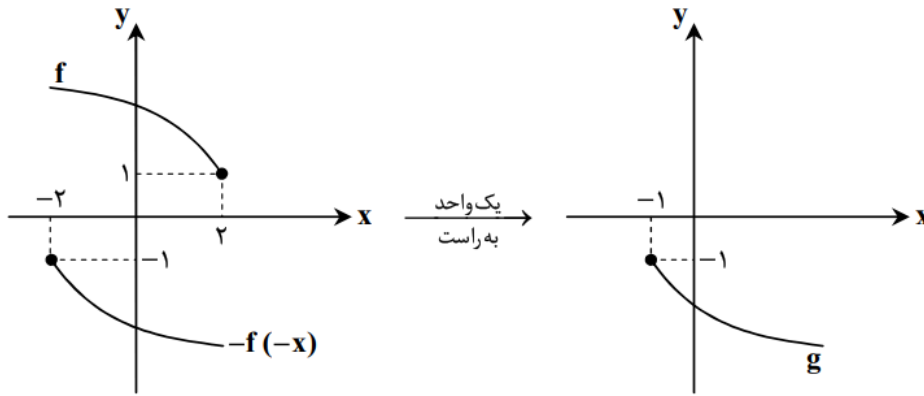
$$f(x) = \left|2 - \frac{3}{2}x\right| \Rightarrow f(x+2) = \left|2 - \frac{3}{2}(x+2)\right| = \left|-\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right|$$

حال معادله $f(x+2) = 2$ را حل می کنیم:

$$\left|\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -\frac{9}{2} \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

پس مجموع جواب های معادله داده شده برابر $-\frac{1}{3} - 3 = -\frac{10}{3}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



ابتدا نمودار f را نسبت به محور طول‌ها و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم (f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده‌ایم). و سپس نمودار حاصل را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار g به دست آید.

۱۲۷

بنابراین داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{طول‌ها و عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} y = -f(-x) \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} g(x) = -f(-(x-1))$$

$$\Rightarrow g(x) = -f(1-x) \Rightarrow g(x) + f(1-x) = 0$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا از نقطه A روی تابع g به متناظر آن روی تابع f می‌رسیم. برای این کار کافی است طول نقطه A را نصف کرده و چهار واحد از عرض آن

۱۲۸

کم کرده و سپس حاصل را در $-\frac{1}{3}$ ضرب کنیم:

$$g(x) = -3f\left(\frac{x}{3}\right) + 4, A(-4, 2) \in g \xrightarrow[-\frac{1}{3}(y-4)]{\frac{x}{2}} B(-2, \frac{2}{3}) \in f$$

اکنون متناظر B روی f را روی تابع h پیدا می‌کنیم:

$$h(x) = 2f\left(\frac{-x+2}{5}\right) + 1 \xrightarrow[\frac{2y+1}{2x+1}]{-(\Delta x - 2)} A'(12, \frac{7}{3}) \in h$$

پس حاصل ضرب مختصات نقطه A' برابر ۲۸ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

مراحل انتقال را انجام می‌دهیم:

۱۲۹

$$y = \frac{4x-2}{-x+4} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}]{x \rightarrow -x} y = \frac{-4x-2}{x+4} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}]{y \rightarrow -y} y = -\frac{-4x-2}{x+4} = \frac{4x+2}{x+4}$$

حال نمودار را k واحد در راستای افقی انتقال می‌دهیم: پس x را به $x-k$ تبدیل می‌کنیم:

$$y = \frac{4(x-k)+2}{x-k+4} = \frac{4x+2-4k}{x+4-k}$$

اکنون تابع به دست آمده را با تابع اولیه مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{4x+2-4k}{x+4-k} = \frac{4x-2}{-x+4} \xrightarrow{x=2} \frac{10-4k}{6-k} = 3 \Rightarrow 10-4k = 18-3k \Rightarrow k = -8$$

پس باید x را به $x+8$ تبدیل کنیم، یعنی نمودار را ۸ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

■ دقت کنید اگر x را به $x+k$ تبدیل کنیم، مقدار k برابر ۸ به دست می‌آید و نتیجه تفاوتی نمی‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۰

توابع $y = x^3$ و $y = 4x$ اکیداً صعودی هستند، پس تابع f اکیداً صعودی است. حال داریم:

$$g(x) = \sqrt{f^{-1}(x)} - x$$

برای به دست آوردن دامنه تابع g ، باید نامعادله $f^{-1}(x) - x \geq 0$ را حل کنیم؛ یعنی $f^{-1}(x) \geq x$

چون f اکیداً صعودی است پس وقتی f^{-1} بالاتر از خط $y = x$ است که f پایین تر از خط $y = x$ باشد، زیرا محل برخورد f و f^{-1} روی خط $y = x$ است؛ بنابراین بهتر است نامعادله زیر را حل کنیم:

$$f^{-1}(x) \geq x \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f} f(x) \leq x \Rightarrow x^3 + 4x \leq x \Rightarrow x^3 + 3x \leq 0 \Rightarrow x \underbrace{(x^2 + 3)}_{+} \leq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0]$$

پس دامنه تابع g شامل یک عدد صحیح نامنفی است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۱

ابتدا دامنه‌ی هر کدام از توابع را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \sqrt{x-2} &\Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_{f(x)} = [2, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{5-x} &\Rightarrow 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow D_{g(x)} = (-\infty, 5] \end{aligned} \right\} D_{f+g} = [2, 5]$$

$$D_{(f+g) \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f+g}\} = \{x \in [2, \infty) \mid \sqrt{x-2} \in [2, 5]\} \quad *$$

$$2 \leq \sqrt{x-2} \leq 5 \xrightarrow{\text{توان } 2} 4 \leq x-2 \leq 25 \Rightarrow 6 \leq x \leq 27 \xrightarrow{*} D_{(f+g) \circ f} = [6, 27]$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۲

در تابع یک به یک می‌دانیم: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\Rightarrow f(x + g \circ g(x)) = f(2x - 7 + g(x)) \Rightarrow x + g \circ g(x) = 2x - 7 + g(x) \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{تابع خطی } g} g(x) = ax + b \rightarrow g \circ g(x) = g(g(x)) = g(ax + b) = a(ax + b) + b$$

$$(*) \Rightarrow x + a^2x + ab + b = 2x - 7 + ax + b \Rightarrow a^2x + ab = (2+a)x - 7 \quad (**)$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 + a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع g نزولی می‌باشد بنابراین $a = -1$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow g(x) = -x + b \quad \left. \begin{aligned} & \\ &(**) \Rightarrow ab = -7 \xrightarrow{a=-1} b = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x) = -x + 7 \rightarrow g(3) = 4$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۳

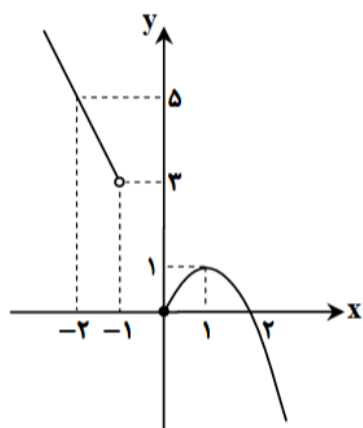
نکته: تابعی که در بخش‌های مختلف دامنه‌اش، ضابطه‌های متفاوت دارد را تابع چندضابطه‌ای می‌گویند.

ابتدا نمودار تابع قطعه‌ای داده‌شده را رسم می‌کنیم. سپس از روی نمودار، برد تابع را به‌دست می‌آوریم.

تابع در محدوده $x \geq 0$ ، یک سهمی با رأس $(1, 1)$ است که از مبدأ می‌گذرد و در محدوده $x < -1$ ، یک خط با شیب -2 است که از نقطه

$(-1, 3)$ شروع می‌شود:

باتوجه به نمودار، برد تابع، مجموعه $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ یا $\mathbb{R} - (1, 3]$ است.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴

با جای‌گذاری مقدار $x = 4$ در رابطه $f(x) = 3x - 3f(4) + 4$ داریم: $f(4) = 4 \Rightarrow 4f(4) = 16 \Rightarrow f(4) = 4$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۵

نکته: برای به‌دست آوردن وارون یک تابع خطی غیر ثابت، در ضابطه $y = f(x)$ مقدار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y

را عوض می‌کنیم. ضابطه جدید به‌دست آمده وارون f یا همان $f^{-1}(x)$ است.

کافی است در رابطه زیر به جای x عدد ۳ را قرار دهیم:

$$f(x) + 2f(3) = 3x + 12 \xrightarrow{x=3} f(3) + 2f(3) = 9 + 12 \Rightarrow 3f(3) = 21 \Rightarrow f(3) = 7$$

$$f(x) + 2f(3) = 3x + 12 \xrightarrow{f(3)=7} f(x) + 14 = 3x + 12 \Rightarrow f(x) = 3x - 2$$

$$y = 3x - 2 \Rightarrow 3x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$a + b = 1$$

پس $a = \frac{1}{3}$ و $b = \frac{2}{3}$ است؛ بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۶

در تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ باید $x \in D_{f(x)}$ باشد یا به عبارتی $x \in R_{f^{-1}(x)}$ است. با توجه به اینکه انتقال افقی تأثیری در برد تابع

ندارد، بنابراین داریم:

$$R_{f^{-1}(x+2)} = R_{f^{-1}(x)} = (-\infty, 4] \quad x \in (-\infty, 4] \rightarrow x \in (-\infty, 1]$$

بنابراین دامنه تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ ، بازه $(-\infty, 1]$ می‌باشد که شامل عدد طبیعی $x = 1$ است. پس $a = 1$ و داریم:

$$f(a+3) = f(4) \rightarrow f(4) = m \rightarrow f^{-1}(m) = 4$$

$$y = f^{-1}(x+2) \xrightarrow{\text{باتوجه به نمودار}} x = -4 \rightarrow y = f^{-1}(-4+2) = 4 \rightarrow f^{-1}(-2) = 4 \rightarrow f(4) = -2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۷

در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد، تابع f با f^{-1} یکسان خواهد بود، بنابراین داریم:

$$g(h(f(f(-3)))) = g(h(f(f^{-1}(-3)))) = g(h(-3)) \quad (*)$$

$$g^{-1}(x) = h(4x-2) \xrightarrow{x=-\frac{1}{4}} g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) = h(-3) \xrightarrow{(*)} g(h(-3)) = g\left(g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f(-2) = f^{-1}(-2) = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{g(h(f(f(-3))))}{f(-2)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f(x) = -3 + \sqrt{2-x} \xrightarrow{x \rightarrow y} x = -3 + \sqrt{2-y}$$

$$\rightarrow x+3 = \sqrt{2-y} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 + 6x + 9 = 2 - y \Rightarrow y = f^{-1}(x) = -x^2 - 6x - 7 \rightarrow f^{-1} \circ g(x) = -g^2(x) - 6g(x) - 7$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ g(x) + 2g(x) = -g^2(x) - 4g(x) \cancel{=} -x^2 + 4x \cancel{=}$$

$$g^2(x) + 4g(x) = x^2 - 4x \Rightarrow (g(x) + 2)^2 \cancel{=} (x-2)^2 \cancel{=}$$

$$\Rightarrow (g(x) + 2)^2 = (x-2)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} g(x) + 2 = \pm(x-2) \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x-4 \\ g(x) = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(1) = -3 \\ g(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow (f+g)_{(1)} = \text{کمترین مقدار} = f(1) + g(1) = -2 - 3 = -5$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\text{می دانیم} \begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \rightarrow x \in D_{f^{-1}} \text{ یا } x \in R_f \\ f^{-1} \circ f(x) = x \rightarrow x \in D_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_f = R \\ R_f = (-\infty, 1) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 - 3f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) \Rightarrow x^2 - 2 - 3x = x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 + 8 = 24 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6} \xrightarrow{(-\infty, 1)} x = 2 - \sqrt{6}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۸

۱۳۹

۱۴۰

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ باشد همواره روی دامنه‌اش غیر یک به یک است، پس این شرط را اعمال می‌کنیم:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \rightarrow \frac{k^2}{\lambda} = \frac{6}{k-1} \Rightarrow k^2(k-1) = 6\lambda \Rightarrow k^3 - k^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow k^3 - 64 - k^2 + 16 = 0$$

$$\rightarrow (k-4)(k^2 + 4k + 16) - (k-4)(k+4) = 0 \Rightarrow (k-4)(\underbrace{k^2 + 3k + 12}_{\Delta < 0}) = 0 \Rightarrow k = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{x^2 - kx}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 4x}{4 - x} = \left[\frac{0^-}{0^+} \right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



توجه: برای محاسبه‌ی حد $[x^2 - 4x]$ در $x = 4$ از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+3}{3x-1}\right) = \frac{3\left(\frac{x+3}{3x-1}\right) + 1}{\frac{x+3}{3x-1} + 2} = \frac{6x+8}{7x+1} \rightarrow (g \circ f)(x) = \frac{6x+8}{7x+1}$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{-x+8}{7x-6} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)^{-1} = \frac{-x}{7x} = -\frac{1}{7}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\underline{D_f} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

نکته: دامنه تقسیم دو تابع به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

۱۴۲

با توجه به نکته بالا، ابتدا دامنه توابع f و g را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{5-x} \Rightarrow 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow D_f = (-\infty, 5]$$

$$g \Rightarrow D_g = (-4, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = (-\infty, 5] \cap (-4, +\infty) = (-4, 5]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 3, 5 \Rightarrow \underline{D_f} = D_f \cap D_g - \{-2, 3, 5\} \Rightarrow \underline{D_f} = (-4, 5] - \{-2, 3, 5\} = (-4, 5) - \{-2, 3\}$$

$$\frac{f}{g} \Rightarrow \text{مجموع این اعداد صحیح} = -3 - 1 + 0 + 1 + 2 + 4 = 3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا داریم: ۱۴۳

$$\text{fog}^{-1}(a) = -2$$

$$\Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -2$$

از طرفی با توجه به تابع f ، مشاهده می‌شود:

$$f(-1) = f(-2) = -2$$

بنابراین:

$$\begin{cases} g^{-1}(a) = -1 \Rightarrow g(-1) = a \Rightarrow -1 - \sqrt{4} = -3 \Rightarrow a = -3 \\ g^{-1}(a) = -2 \Rightarrow g(-2) = a \Rightarrow -2 - \sqrt{9} = -5 \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای a برابر -8 است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

مراحل بیان شده را به ترتیب انجام می‌دهیم و ضابطه g را به دست می‌آوریم: ۱۴۴

$$f(x) = \sqrt{12-3x} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}]{x \rightarrow -x} y = \sqrt{12+3x}$$

$$\xrightarrow[\text{دو واحد به راست}]{x \rightarrow x-2} y = \sqrt{12+3(x-2)} \Rightarrow g(x) = \sqrt{3x+6}$$

اکنون تابع دیگر را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{12-3x} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}]{-(y)} y = -\sqrt{12-3x} \xrightarrow[\text{واحد بالا}]{y+k} y = -\sqrt{12-3x} + k$$

طول محل برخورد تابع g و تابع به دست آمده برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$\sqrt{3x+6} = -\sqrt{12-3x} + k \xrightarrow{x=1} 3 = -3 + k \Rightarrow k = 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۵ برای رسم نمودار تابع $y = f(ax+b)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است b واحد از طول نقاط کم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{1}{a}$ ضرب کنیم. در واقع:

$$y = f(x) \xrightarrow[\frac{x-b}{a}]{} y = f(ax+b)$$

پس نقطه با طول $x = -2$ ، به نقطه $\frac{-2-b}{a}$ و نقطه با طول $x = 5$ به نقطه $\frac{5-b}{a}$ تبدیل می‌شود. چون دامنه تابع f بازه $(-2, 5]$ و دامنه

$$\begin{cases} \frac{-2-b}{a} = 5 \\ \frac{5-b}{a} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a = -2-b \\ -2a = 5-b \end{cases} \xrightarrow{-} \begin{cases} 5a = -2-b \\ -2a = 5-b \end{cases} \Rightarrow 7a = -7 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3$$

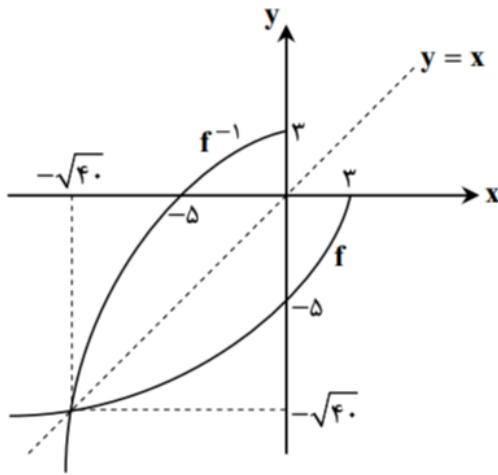
تابع $f(ax+b)$ بازه $(-2, 5]$ است؛ بنابراین:

بنابراین:

$$ab = -3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۶



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

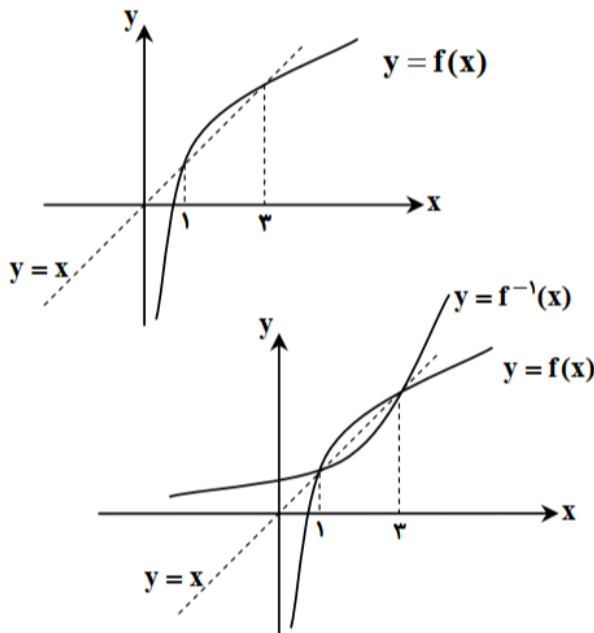
ابتدا نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} رسم شود. با توجه به شکل $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$ اکنون باید نامعادله $\frac{f(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0$ را حل کنیم تا دامنه تابع داده‌شده به‌دست آید. با توجه به شکل $f(x) \leq 0$ است. پس کافی است:

$$x - f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow x < f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} x \in (-\sqrt{40}, 0]$$

پس در دامنه تابع، هفت عدد صحیح $0, -1, -2, -3, -4, -5, -6$ وجود دارند.

۱۴۷

نکته: برای رسم نمودار $y = f(kx)$ کافی است طول نقاط روی تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا با استفاده از نکته بالا از روی نمودار رسم‌شده، نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = x$ را با ضرب طول نقاط نمودار تابع $y = f(\frac{x}{3})$ و $y = \frac{x}{3}$ در $\frac{1}{3}$ رسم می‌کنیم. سپس قرینه نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ به‌دست بیاید.

دامنه تابع $g(x)$ ، مجموعه همه x هایی است که به‌ازای آن‌ها $x - f^{-1}(x) \geq 0$ یا $x \geq f^{-1}(x)$ یعنی x هایی که به‌ازای آن‌ها خط $y = x$ پایین‌تر از نمودار $y = f^{-1}(x)$ قرار نمی‌گیرد که با توجه به نمودار، بازه $[1, 3]$ است.

۱۴۸

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطه وارون $y = f(x)$ ، از روی ضابطه f باید x را برحسب y حل کرده و سپس جای x و y را عوض کنیم. ابتدا ضابطه f را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2$$

حال برای به‌دست آوردن ضابطه وارون f باید نوشت:

$$y = (x-1)^2 - 2 \Rightarrow (x-1)^2 = y+2 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y+2} \xrightarrow{x \leq 1} -(x-1) = \sqrt{y+2} \\ \Rightarrow x = -\sqrt{y+2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x+2} + 1$$

حال برای تلاقی f^{-1} و g داریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow -\sqrt{x+2} + 1 = x + 1 \Rightarrow -\sqrt{x+2} = x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \checkmark \\ x = 2 & \text{غلق} \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۹

پاسخ تشریحی

ابتدا رابطه f را به دست می آوریم:

$$|x|(|y|+2)=6$$

$$۱) \begin{cases} |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ |y|+2=6 \Rightarrow |y|=4 \Rightarrow y=\pm 4 \end{cases} \Rightarrow (1,4), (1,-4), (-1,4), (-1,-4)$$

$$۲) \begin{cases} |x|=6 \Rightarrow x=\pm 6 \\ |y|+2=1 \Rightarrow |y|=-1 \Rightarrow \text{غیرممکن} \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2 \\ |y|+2=3 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow (2,1), (2,-1), (-2,1), (-2,-1)$$

$$۴) \begin{cases} |x|=3 \Rightarrow x=\pm 3 \\ |y|+2=2 \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow (3,0), (-3,0)$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۰

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به صورت سؤال تابع f به صورت $f(x) = \frac{ax+a-6}{a-\lambda x} = b$ است. پس داریم:

$$ax+a-6=b(a-\lambda x) \Rightarrow ax+a-6=ba-\lambda bx$$

این معادله همواره برقرار است، پس باید ضرایب x^1 و x^0 با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a=-\lambda b \\ a-6=ba \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری اولی در دومی}} -\lambda b-6=b(-\lambda b) \Rightarrow \lambda b^2-\lambda b-6=0$$

$$\Rightarrow 4b^2-4b-3=0 \Rightarrow \Delta=16+12 \times 4=64 \begin{cases} b=\frac{4+\lambda}{\lambda}=\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\lambda b \Rightarrow a=-12 \Rightarrow ab=(-12)(\frac{3}{2})=-18 \\ b=\frac{4-\lambda}{\lambda}=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\lambda b \Rightarrow a=4 \Rightarrow ab=4(-\frac{1}{2})=-2 \end{cases}$$

گام دوم: پس حداقل مقدار ab برابر -18 است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۱

پاسخ تشریحی

گام اول: تابع g خطی است، پس می توان آن را به صورت $g(x) = mx + b$ در نظر گرفت. حالا تابع y را تشکیل می دهیم که تابعی همانی به صورت $y = x$ است:

$$y=f(x)+g(x)=(ax+6)^2-(3x+2a)^2+mx+b=x$$

$$\Rightarrow a^2x^2+12ax+36-(9x^2+12ax+4a^2)+mx+b=x$$

$$\Rightarrow (a^2-9)x^2+mx+(36-4a^2+b)=x$$

گام دوم: از اتحاد تشکیل شده داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ضریب } x^2: a^2-9=0 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3 \\ \text{ضریب } x: m=1 \\ \text{ضریب } x^0: 36-4a^2+b=0 \xrightarrow{\text{جای گذاری مقدار } a} b=0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x)=x$$

گام سوم: مقدار $g(a)$ برابر با ± 3 می تواند باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۲

از طرفی طول رأس تابع، برابر با $x_S = \frac{-2+4}{2} = 1$ است؛ که با توجه به نمودار، $f(x_S) = 18$ است. این را در تابع f جای گذاری می کنیم تا

مقدار k را به دست بیاوریم: $f(1) = 18 \Rightarrow k \times 2(-3) = 18 \Rightarrow k = -2$

پس $f(x) = -2(x+2)(x-4)$ است.

گام اول: تابع g از عرض از مبدأ تابع f می گذرد، پس: $g(0) = f(0) = -2 \times 2 \times (-4) = 16$

نقطه دیگری که در تابع g صدق می کند، $g(4) = 0$ است. به کمک این دو نقطه، ضابطه تابع خطی g را می یابیم:

$$g(x) = mx + 16 \xrightarrow{g(4)=0} 4m + 16 = 0 \Rightarrow m = -4 \Rightarrow g(x) = -4x + 16$$

گام دوم: به ازای $x = 3$ مقدار دو تابع f و g را پیدا می کنیم:

$$f(3) = -2 \times 5 \times (-1) = 10 \Rightarrow |f(3) - g(3)| = 6$$

$$g(3) = -12 + 16 = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۳

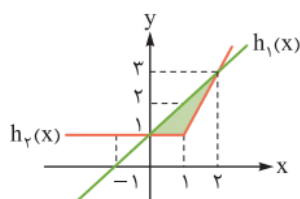
پاسخ تشریحی

گام اول: تابع $f(x) = x$ است. تابع را در راستای محور y ها یک واحد به بالا انتقال می دهیم:

$$f(x) \xrightarrow{1 \text{ واحد به بالا}} f(x) + 1 = x + 1$$

گام دوم: برای تابع $g(x) = x + |x|$ ، ابتدا تابع را در راستای محور y ها یک واحد به بالا انتقال می دهیم، سپس تابع به دست آمده را در راستای محور x ها یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم:

$$g(x) \xrightarrow{1 \text{ واحد به بالا}} g(x) + 1 = |x| + x + 1 \xrightarrow[\text{انتقال به سمت راست}]{x \rightarrow x-1} g(x-1) = |x-1| + (x-1) + 1 = |x-1| + x$$



گام سوم: دو تابع نهایی به صورت $h_1(x) = x + 1$ و $h_2(x) = |x - 1| + x$ هستند. دو تابع را در یک

دستگاه مختصات رسم می کنیم تا مساحت ناحیه محدود به دو نمودار را به دست آوریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۴

پاسخ تشریحی گام اول (تعیین علامت $f(x)$):

باید $(ax+b)f(x) \geq 0$ ، ریشه‌های $f(x)$ با توجه به نمودار برابر -2 و 5 هستند، جدول تعیین علامت عبارت $(ax+b)f(x)$ را رسم می‌کنیم ولی ریشه $ax+b$ یعنی $\frac{-b}{a}$ را روی آن نمی‌گذاریم. به عبارت دیگر فقط $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

توجه داشته باشید که $\frac{-b}{a}$ در یکی از 5 جایگاهی که مشخص کردیم قرار می‌گیرد:

	↓	↓	↓	↓	↓
x		-2		5	
$f(x)$	+	+	+	+	-
$ax+b$					
$(ax+b)f(x)$					

گام دوم (لحاظ کردن شرط سؤال):

چون می‌خواهیم دامنه برابر $\mathbb{R}$ شود، باید جدول به صورت زیر باشد؛ یعنی ردیف آخر یا باید صفر باشد یا مثبت. $(+ \text{ در } + \text{ می‌شه } + \text{ در } - \text{ می‌شه } -)$

		↓			
x		-2		5	
$f(x)$	+	+	+	+	-
$ax+b$	+		+		-
$(ax+b)f(x)$	+	+	+	+	+

پس $\frac{-b}{a}$ یا برابر -2 است یا 5 ، با توجه به این که $ax+b$ در ریشه خود یعنی $\frac{-b}{a}$ تغییر علامت می‌دهد پس طبق جدول $\frac{-b}{a} = 5$.

گام سوم (پیدا کردن a و b): با توجه به جدول تعیین علامت به دست آمده و نکته گفته شده a منفی است حالا:

$$\frac{-b}{a} = 5 \Rightarrow -b = \boxed{5a} \Rightarrow b > 0.$$

در نتیجه $a < 0$ و $b > 0$ که از بین گزینه‌ها فقط (2) این شرایط را دارد یعنی (a, b) می‌تواند $(-2, 10)$ باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۵

پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل سؤال):

با توجه به فرم دامنه، مخرج دارای یک ریشه است، پس دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول: مخرج درجه یک است.

حالت دوم: مخرج دارای ریشه مضاعف است.

گام دوم (به دست آوردن mn از حالت اول): اگر مخرج درجه یک باشد، ضریب x^2 یعنی $m-1$ باید صفر شود پس $m=1$. از طرفی با توجه به $D_f = \mathbb{R} - \{m\}$ ، یا همان 1 ریشه مخرج است:

$$(m-1)x^2 - 12(m) + n = 0 \Rightarrow n = 12 \Rightarrow m.n = 12$$

گام سوم (به دست آوردن mn از حالت دوم): با توجه به دامنه در این جا m ریشه مضاعف است و طبق نکته گفته شده داریم:

$$(m-1)x^2 - 12x + n = 0 \Rightarrow \text{ریشه} = \frac{12}{2m-2} \xrightarrow{\text{ریشه همان } m \text{ است.}} m = \frac{12}{2m-2}$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 12 \xrightarrow{\text{مرتب سازی}} m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری } m \text{ هادر}} \begin{cases} (3-1)(9) - 12(3) + n = 0 \Rightarrow 18 - 36 + n = 0 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow m.n = 54 \\ (-2-1)(4) - 12(-2) + n = 0 \Rightarrow -12 + 24 + n = 0 \Rightarrow n = -12 \Rightarrow m.n = 24 \end{cases}$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال): در بین $m.n$ های به دست آمده در گام‌های دوم و سوم کمترین مقدار $m.n$ برابر 12 است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول (محاسبه $f(\frac{7}{9})$): در $f(mf(\frac{7}{9})) = 4$ از داخل شروع می‌کنیم و با توجه به ضابطه $f(x) = 2x + [x]$ را $f(\frac{7}{9})$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(\frac{7}{9}) = 2(\frac{7}{9}) + [\frac{7}{9}] = 1 + 1 = 2$$

گام دوم (جای گذاری $f(\frac{7}{9})$): در $f(mf(\frac{7}{9})) = 4$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$f(mf(\frac{7}{9})) = 4 \Rightarrow f(2) = 4$$

$$\xrightarrow{f(x)=2x+[x]} 2(2m) + [2m] = 4 \Rightarrow 4m + [2m] = 4$$

$$\Rightarrow [2m] = 4 - 4m$$

$$[2m] = 4 - 4m \Rightarrow 4 - 4m \leq 2m < 4 - 4m + 1$$

$$\Rightarrow 4 - 4m \leq 2m < 5 - 4m \xrightarrow{\text{هر سه طرف به اضافه } 4m} 4 \leq 6m < 5$$

$$\Rightarrow \frac{4}{6} \leq m < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}$$

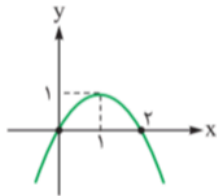
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول (حذف قدر مطلق): با توجه به وجود قدر مطلق، تابع را به دو ضابطه تبدیل می‌کنیم:

$$x < 0: f(x) = (x-x)\sqrt{\frac{2-x}{x}} \Rightarrow f(x) = 0 \quad x > 0: f(x) = (x+x)\sqrt{\frac{2-x}{x}} \Rightarrow f(x) = 2x\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

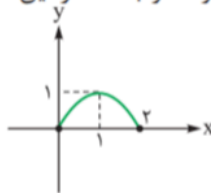
گام دوم (ساده کردن ضابطه پایینی): در ضابطه پایینی x را به داخل رادیکال می‌بریم تا ضابطه ساده‌تر شود:

$$x > 0: f(x) = 2x\sqrt{\frac{2-x}{x}} \Rightarrow 2\sqrt{x^2 \times \frac{2-x}{x}} \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x(2-x)} \quad *$$



گام سوم (پیدا کردن بیشترین مقدار و کمترین مقدار زیر رادیکال): سهمی زیر رادیکال را رسم می‌کنیم، ریشه‌های این سهمی ۰ و ۲ و طول رأس آن وسط ریشه‌ها یعنی ۱ است، ۱ را اگر در معادله سهمی قرار دهیم حاصل $1(2-1) = 1$ می‌شود.

چون سهمی زیر رادیکال است، پس فقط قسمتی قابل قبول است که بالای محور x ها یا برابر صفر باشد، در این محدوده بیشترین مقدار و کمترین مقدار سهمی برابر ۱ و ۰ است.



گام چهارم (پیدا کردن خواسته سؤال): در Max و Min ، به ازای بیشترین مقدار و کمترین مقدار سهمی زیر رادیکال رخ می‌دهد که به ترتیب برابر ۱ و ۰ است پس:

$$\left. \begin{aligned} Max(f) &= 2\sqrt{1} = 2 \\ Min(f) &= 2\sqrt{0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Max - Min = 2 - 0 = 2$$

این جوری هم ببین! در ضابطه $f(x) = 2\sqrt{x(2-x)}$ ، $x > 0$ دامنه به صورت زیر می‌شود:

$$x(2-x) > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \xrightarrow{x > 0} 0 < x \leq 2$$

$$R_f = [0, 2]$$

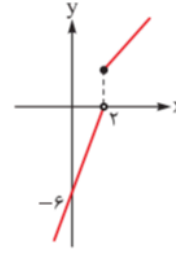
Min f Max f

به ازای $0 < x \leq 2$ داریم $0 \leq x(2-x) \leq 1$ ، در نتیجه $0 \leq 2\sqrt{x(2-x)} \leq 2$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول (تحلیل سؤال): با توجه به صورت سؤال، نمودار ضابطه بالایی به صورت زیر است:

برای این که تابع یک به یک شود، نمودار آن باید به یکی از شکل های زیر باشد:



یعنی شیب ضابطه دوم باید مثبت باشد و هم چنین ضابطه پایین در $x = 2$ حتماً باید مقداری بزرگتر یا مساوی صفر داشته باشد.

گام دوم (پیدا کردن محدوده k و برداشتن قدر مطلق): از (۱) در گام اول متوجه شدیم شیب که همان ضریب x است در ضابطه پایینی مثبت است، پس $x - k$ که داخل قدر مطلق است خودش باید بیرون بیاید در نتیجه:

$$x - k \geq 0 \Rightarrow x \geq k \xrightarrow{x \geq 2} k \leq 2 \quad (*)$$

بنابراین ضابطه پایینی هم به این صورت می شود:

$$\text{ضابطه پایینی: } y = 2k + |x - k| \Rightarrow y = 2k + x - k \Rightarrow y = k + x$$

باید خودش خارج شود

گام سوم (پیدا کردن خواسته سؤال): با توجه به (۲) در گام اول، در $x = 2$ باید $k + x$ مقداری مثبت یا صفر داشته باشد پس:

$$2 + k \geq 0 \Rightarrow k \geq -2 \quad (**)$$

باید مثبت باشد

از اشتراک (*) و (**) به دست می آید که $-2 \leq k \leq 2$ ، پس k نمی تواند برابر -4 باشد، در نتیجه $\boxed{۲}$ پاسخ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول (نوشتن ضابطه f): با توجه به نمودار، تابع خطی f از نقاط $(0, 2)$ و $(3, 0)$ عبور می‌کند، با توجه به فرمول $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شیب آن را به دست می‌آوریم، عرض از مبدأ آن نیز برابر ۲ است، با توجه به درس‌نامه ضابطه f را می‌نویسیم:

$$m = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = mx + b \\ m = -\frac{2}{3}, b = 2 \end{array} \right. \rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

شیب: $m = -\frac{2}{3}$
عرض از مبدأ = ۲

گام دوم (نوشتن ضابطه g): با توجه به نمودار، تابع خطی g از نقاط $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ عبور می‌کند و عرض از مبدأ آن نیز برابر ۱ است، ضابطه g را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} y = mx + b \\ m = 1, b = 1 \end{array} \right. \rightarrow g(x) = x + 1$$

شیب: $m = 1$
عرض از مبدأ = ۱

گام سوم (پیدا کردن a): طبق نمودار توابع f و g در $x = a$ با هم برخورد می‌کنند پس $f(a) = g(a)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = -\frac{2}{3}x + 2 \\ g(x) = x + 1 \end{array} \right. \xrightarrow{f(a)=g(a)} -\frac{2}{3}(a) + 2 = a + 1 \Rightarrow \frac{5}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

گام چهارم (پیدا کردن $f^{-1}(a)$ و $g^{-1}(a)$): فرض می‌کنیم $f^{-1}(\frac{3}{5}) = m$ و $g^{-1}(\frac{3}{5}) = n$ ، با توجه به درس‌نامه m و n را پیدا می‌کنیم:

$$(\frac{3}{5}, m) \in f^{-1} \Rightarrow (m, \frac{3}{5}) \in f \Rightarrow -\frac{2}{3}m + 2 = \frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{2}{3}m = -\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow m = f^{-1}(\frac{3}{5}) = \frac{7}{10} = 2/1$$

$$(\frac{3}{5}, n) \in g^{-1} \Rightarrow (n, \frac{3}{5}) \in g \Rightarrow n + 1 = \frac{3}{5} \Rightarrow n = g^{-1}(\frac{3}{5}) = -\frac{2}{5} = -0/4$$

گام پنجم (به دست آوردن خواسته سؤال): می‌دانیم که $(f^{-1} - g^{-1})(a) = f^{-1}(a) - g^{-1}(a)$ ، پس:

$$(f^{-1} - g^{-1})(a) = f^{-1}(a) - g^{-1}(a) \xrightarrow{a=\frac{3}{5}} \underbrace{f^{-1}(\frac{3}{5})}_{2/1} - \underbrace{g^{-1}(\frac{3}{5})}_{-0/4} = 2/1 - (-0/4) = 2/5$$

از گام قبلی از گام قبلی

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول (پیدا کردن ضابطه f^{-1}): با توجه به نکته روش دوم سؤال قبل، f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f: y = 2x + 4 \Rightarrow 2x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y-4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

گام دوم (جای‌گذاری ضابطه‌ها): $g(x) = x$ همانی است پس $g(x) = x$ ، حال ضابطه‌های به دست آمده را در تساوی داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم ($x \neq 0$):

$$f^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)g(x) = \frac{f(x)}{b} \Rightarrow \left(\frac{\frac{a}{x}-4}{2}\right)x = \frac{2x+4}{b}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} bx\left(\frac{a}{x}-4\right) = 2(2x+4)$$

گام سوم (پیدا کردن خواسته سؤال): با توجه به تساوی به دست آمده در گام دوم داریم:

$$\Rightarrow \underline{ab - 4bx} = \underline{4x + 8} \Rightarrow \begin{cases} -4b = 4 \Rightarrow b = -1 \\ ab = 8 \xrightarrow{b=-1} -a = 8 \Rightarrow a = -8 \end{cases}$$

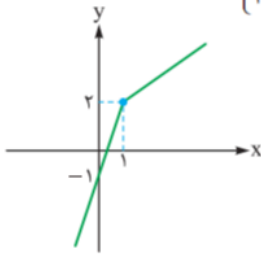
در نتیجه:

$$a + b = -8 + (-1) = -9$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = 2x - |x - 1| = \begin{cases} 2x - (x - 1) : x \geq 1 \\ 2x + (x - 1) : x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 : x \geq 1 \\ 3x - 1 : x < 1 \end{cases}$$



گام دوم: با توجه به نمودار تابع f ، این تابع صعودی است، بنابراین داریم:

$$D_f = [\alpha, \beta] \Rightarrow R_f = [f(\alpha), f(\beta)]$$

گام سوم: مقادیر α و β را به کمک تابع f تعیین می‌کنیم:

$$f(\alpha) = -4 \Rightarrow 2\alpha - |\alpha - 1| = -4 \begin{cases} \alpha \geq 1 : \alpha + 1 = -4 \Rightarrow \alpha = -5 & \text{غ.ق.ق} \\ \alpha < 1 : 3\alpha - 1 = -4 \Rightarrow \alpha = -1 & \text{ق.ق.ق} \end{cases}$$

$$f(\beta) = 3/5 \Rightarrow 2\beta - |\beta - 1| = 3/5 \begin{cases} \beta \geq 1 : \beta + 1 = 3/5 \Rightarrow \beta = 2/5 & \text{ق.ق.ق} \\ \beta < 1 : 3\beta - 1 = 3/5 \Rightarrow \beta = 1/5 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = -1 + 2/5 = 1/5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: تابع f را دو واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم. برای این کار کافی است به جای متغیر x در تابع، $x - 2$ را جایگزین کنیم:

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow x - 2} f_1(x) = \frac{3(x - 2) + 1}{(x - 2) - 1} = \frac{3x - 5}{x - 3}$$

گام دوم: تابع f_1 را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا تابع g حاصل شود:

$$g(x) = f_1(x) - 1 = \frac{3x - 5}{x - 3} - 1$$

$$g(2) = \frac{3(2) - 5}{2 - 3} - 1 = -2$$

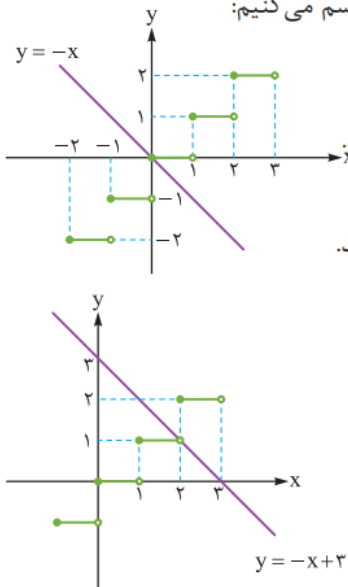
گام سوم: $g(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی

۱۶۳

گام اول: نمودار تابع $y = -x$ (نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم) و تابع $y = [x]$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



گام دوم: وضعیت نمودار تابع $y = [x]$ را با انتقال‌یافته‌های تابع $y = -x$ بررسی می‌کنیم:

• اگر $k = 0/5$ ، نمودار تابع $y = -x + 0/5$ در نقطه‌ای به طول $x = 0/5$ ، تابع $y = [x]$ را قطع می‌کند.

• اگر $k = 2$ ، نمودار تابع $y = -x + 2$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ ، تابع $y = [x]$ را قطع می‌کند.

• اگر $k = 2/5$ ، نمودار تابع $y = -x + 2/5$ در نقطه‌ای به طول $x = 1/5$ ، تابع $y = [x]$ را قطع می‌کند.

گام سوم: مطابق شکل، نمودار تابع $y = -x + 3$ (یعنی به ازای $k = 3$)، تابع $y = [x]$ را قطع نمی‌کند:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی

۱۶۴

گام اول: مرکز تقارن نمودار تابع $f(x) = a(x-b)^3 + c$ در نقطه‌ای به مختصات (b, c) قرار دارد، پس با مقایسه با نمودار تابع داده‌شده داریم:

$$(b, c) = (1, 4) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

گام دوم: مختصات نقطه $(0, 1)$ را در تابع جایگزین می‌کنیم:

$$1 = a(0-1)^3 + 4 \Rightarrow 1 = -a + 4 \Rightarrow a = 3$$

$$abc = 3 \times 1 \times 4 = 12$$

گام سوم: مقدار abc را محاسبه می‌کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

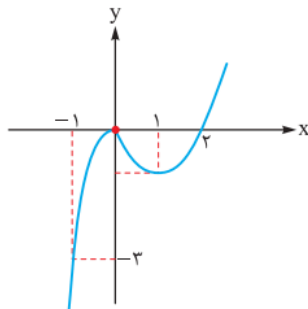
پاسخ تشریحی

۱۶۵

گام اول: با توجه به فرجه‌های دو رادیکال، ابتدا تابع را ساده کرده و سپس به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2} \sqrt[3]{(x-2)^3} = |x|(x-2) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ -x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع را رسم می‌کنیم. دقت کنید که هر کدام از دو ضابطه نمایانگر یک سهمی هستند:



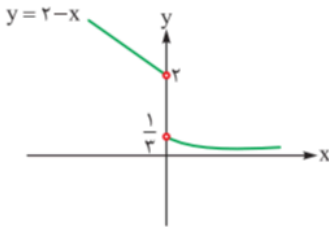
$$b - a = 1 - 0 = 1$$

گام سوم: همان‌طور که در نمودار تابع مشاهده می‌شود، این تابع در بازه $(0, 1)$ اکیداً نزولی است، پس داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی

۱۶۶

گام اول: نمودار تابع را برای ضابطه‌های $x < 0$ و $x > 0$ رسم می‌کنیم.

گام دوم: با توجه به نمودار رسم‌شده برای این که تابع f در $\mathbb{R}$ یکنوا باشد، لازم است $b \leq f(0) = \frac{1}{3} \leq b$ باشد. بنابراین تنها اعداد صحیح ممکن برای b ، اعداد ۱ و ۲ هستند.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی

۱۶۷

گام اول: با توجه به این که دامنه تابع f نامثبت است، محدوده مقادیر قابل قبول برای m را تعیین می‌کنیم:

$$m^2 - m - 2 \leq 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین دوریشه}} -1 \leq m \leq 2 \quad (1)$$

$$m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Rightarrow (m+3)(m-1) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین دوریشه}} -3 \leq m \leq 1 \quad (2)$$

گام دوم: تابع f اکیداً نزولی است، بنابراین داریم:

$$f(m^2 - m - 2) > f(m^2 + 2m - 3) \Rightarrow m^2 - m - 2 < m^2 + 2m - 3$$

$$\Rightarrow 3m > 1 \Rightarrow m > \frac{1}{3} \quad (3)$$

گام سوم: اشتراک جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت زیر است:

$$\frac{1}{3} < m \leq 1$$

در این بازه تنها یک عدد صحیح $m = 1$ وجود دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی

۱۶۸

گام اول: می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است، پس برای دو تابع $f + g$ و $f - 2g$ داریم:

$$\underbrace{2(2f + g)}_{\text{اکیداً صعودی}} + \underbrace{(f - 2g)}_{\text{اکیداً صعودی}} = \underbrace{\Delta f}_{\text{اکیداً صعودی}}$$

بنابراین تابع $f(x)$ اکیداً صعودی و در نتیجه تابع $f(-x)$ اکیداً نزولی است.

گام دوم: توابع $f(-x)$ و $h(x) = -x$ توابعی اکیداً نزولی هستند، پس مجموع آن‌ها نیز اکیداً نزولی است، پس تابع $f(-x) - x$ اکیداً نزولی خواهد بود.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۹

پاسخ تشریحی

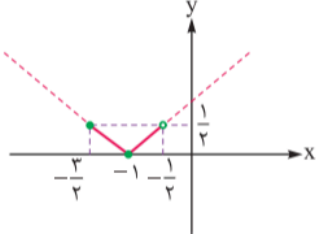
گام اول: ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم تا بتوانیم از رابطه $0 \leq u - [u] < 1$ استفاده کنیم. برای این کار، عدد $\frac{3}{4}$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$$f(x) = x - \left[x + \frac{3}{4}\right] = \underbrace{\left(x + \frac{3}{4}\right)}_u - \underbrace{\left[x + \frac{3}{4}\right]}_{[u]} - \frac{3}{4}$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq u - [u] - \frac{3}{4} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq f(x) < -\frac{1}{4}$$

گام دوم: برای یافتن برد تابع gof ، کافی است برد تابع g را با دامنه $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right]$ پیدا کنیم.

مطابق شکل، برد تابع gof در بازه $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right]$ برابر $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ است.



(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۰

پاسخ تشریحی

گام اول: نقاط $A(0, 2)$ و $B(4, 0)$ روی نمودار تابع f قرار دارند:

$$A(0, 2) \in f(x) \xrightarrow{(-2) \times \text{عرض}} A'(0, -4) \in -2f\left(-\frac{x}{3}\right)$$

$$B(4, 0) \in f(x) \xrightarrow{(-2) \times \text{طول}} B'(-12, 0) \in -2f\left(-\frac{x}{3}\right)$$

گام دوم: نقاط A' و B' همان نقاط برخورد تابع $y = -2f\left(-\frac{x}{3}\right)$ با محورهای مختصات هستند، پس کافی است فاصله این دو نقطه را از یکدیگر پیدا کنیم:

$$A'B' = \sqrt{(0 + 12)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{4^2(3^2 + 1^2)} = 4\sqrt{10}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۱

پاسخ تشریحی

گام اول: برای محاسبه دامنه تابع، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد؛ پس داریم:

$$(2x - 1)(f(x + a) - 2) \geq 0$$

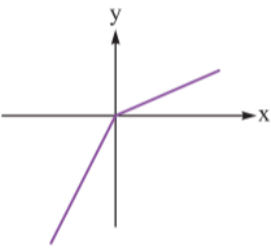
گام دوم: از تغییر متغیر $t = x - \frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$2t(f(t + \frac{1}{2} + a) - 2) \geq 0 \xrightarrow{t \rightarrow x} 2x(f(x + \frac{1}{2} + a) - 2) \geq 0$$

در این صورت نامعادله به صورت روبه‌رو درمی‌آید:

گام سوم: تابع $y = 2x$ فقط از نواحی اول و سوم عبور می‌کند، پس کافی است نمودار تابع $y = f(x + \frac{1}{2} + a) - 2$ نیز فقط از این دو ناحیه عبور کند.

مطابق شکل، نمودار تابع f را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



$$f(x + \frac{1}{2} + a) - 2 = f(x) - 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۲

پاسخ تشریحی

گام اول: نقطه $O(0,0)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد، پس داریم:

$$f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow ab + 9 = 0 \Rightarrow ab = -9$$

گام دوم: نقطه $A(1, \frac{1}{9})$ مرکز تقارن تابع f^{-1} است، پس نقطه $A'(\frac{1}{9}, 1)$ مرکز تقارن تابع f بوده و در نتیجه داریم:

$$f(x) = \lambda x^2 + 4bx^2 + 2ax + ab + 9 \xrightarrow{ab=-9} f(x) = \lambda x^2 + 4bx^2 + 2ax$$

گام سوم: تابع f در صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\lambda x^2 + 4bx^2 + 2ax = (\lambda x - 1)^2 + 1 \Rightarrow \lambda x^2 + 4bx^2 + 2ax = \lambda x^2 - 2\lambda x + 1 + 1 \Rightarrow \begin{cases} 4b = -12 \Rightarrow b = -3 \\ 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$a - b = 3 - (-3) = 6$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا تابع $3 - 2g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$y = (3 - 2g)(x) \Rightarrow y = 3 - 2\sqrt{3x} \Rightarrow 2\sqrt{3x} = 3 - y \Rightarrow \sqrt{3x} = \frac{3-y}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 3x = \frac{(3-y)^2}{4} \Rightarrow x = \frac{(3-y)^2}{12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{3x} \geq 0 \Rightarrow -2\sqrt{3x} \leq 0 \Rightarrow 3 - 2\sqrt{3x} \leq 3$$

گام دوم: برد تابع Y را پیدا می‌کنیم که برابر دامنه وارون تابع خواهد بود:

$$\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = \frac{1}{12}x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

بنابراین برد تابع برابر $[-\infty, 3]$ است که دقیقاً برابر دامنه تابع وارون می‌باشد.

گام سوم: ضابطه تابع وارون و دامنه آن را با عبارت صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{ac}{b} = \frac{(-\frac{1}{2}) \times 3}{\frac{3}{4}} = -2$$

از طرفی، $c = 3$ است؛ پس داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۴

پاسخ تشریحی

گام اول: به کمک رابطه داده‌شده، $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم. کافی است جای x و y را در f^{-1} عوض کنیم:

$$f^{-1}(2f(-\frac{4}{9})) = -1 \Rightarrow f(-1) = 2f(-\frac{4}{9}) \quad (*)$$

گام دوم: مقادیر $f(-1)$ و $f(-\frac{4}{9})$ را از روی تابع f محاسبه کرده و در رابطه $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(-1) = \frac{2(-1) + a}{-1 + 2} = a - 2$$

$$f(-\frac{4}{9}) = \frac{2(-\frac{4}{9}) + a}{-\frac{4}{9} + 2} = \frac{-\frac{8}{9} + a}{\frac{10}{9}} = \frac{9a - 8}{10}$$

$$f(-1) = 2f(-\frac{4}{9}) \Rightarrow a - 2 = \frac{9a - 8}{5} \Rightarrow 5a - 10 = 9a - 8 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

گام سوم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۵

پاسخ تشریحی گام اول: فرض کنیم $(fog)(\circ) = a$ باشد. در این صورت داریم:

$$(fog)(\circ) = a \Rightarrow f(g(\circ)) = a \Rightarrow g(\circ) = f^{-1}(a)$$

$$x + 1 = a \Rightarrow x = a - 1$$

$$f^{-1}((a-1)+1) = 2(a-1)-1 \Rightarrow f^{-1}(a) = 2a-3 \Rightarrow g(\circ) = 2a-3$$

$$x + 1 = \circ \Rightarrow x = -1$$

گام دوم: x را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که $f(x) = \circ$ باشد:

$$f^{-1}(-1+1) = 2(-1)-1 \Rightarrow f^{-1}(\circ) = -3 \Rightarrow f(-3) = \circ$$

$$(gof)(-3) = (-3)^2 + 3(-3) \Rightarrow g(f(-3)) = \circ$$

گام سوم: $x = -3$ را در تابع gof جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow g(\circ) = \circ \Rightarrow 2a-3 = \circ \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow (fog)(\circ) = \frac{3}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۶

پاسخ تشریحی گام اول: ضابطه توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$m_f = \frac{\circ-2}{a-\circ} = -\frac{2}{a} \text{ و عرض از مبدأ } = 2$$

$$f(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$m_g = \frac{\circ-2}{4-\circ} = -\frac{1}{2} \text{ و عرض از مبدأ } = 2$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

گام دوم: ضابطه وارون توابع f و g ، یعنی f^{-1} و g^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{2}{a}x + 2 \Rightarrow -\frac{2}{a}x = y - 2 \Rightarrow x = -\frac{a}{2}y + a \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{a}{2}x + a$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = y - 2 \Rightarrow x = -2y + 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = -2x + 4$$

گام سوم: تابع $y = \left(\frac{f-g^{-1}}{g+f^{-1}}\right)(x)$ تنها در صورتی خطی و غیرثابت است که مخرج کسر، تابعی ثابت باشد، پس با توجه به خطی بودن g و f^{-1} ،

$$m_g + m_{f^{-1}} = \circ \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{a}{2} = \circ \Rightarrow a = -1$$

لازم است شیب خط $g + f^{-1}$ برابر صفر باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۷

پاسخ تشریحی گام اول: مقادیر $g(x)$ را به ازای اعضای دامنه تابع f محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که در تابع $g(x)$ داریم $a + d = \circ$ ،

$$g(2) = \frac{2+7}{2-1} = 9$$

پس $g(x) = g^{-1}(x)$. واضح است که $1 \notin D_g$ و در نتیجه داریم:

$$g(3) = \frac{3+7}{3-1} = 5$$

$$g(-1) = \frac{-1+7}{-1-1} = -3$$

$$f + g = \{(2, 3+9), (3, 4+5), (-1, 12-3)\} = \{(2, 12), (3, 9), (-1, 9)\}$$

گام دوم: تابع $f + g$ را پیدا می‌کنیم:بنابراین برد تابع $f + g$ ، به صورت $\{12, 9\}$ و مجموع اعضای برد برابر ۲۱ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۸

پاسخ تشریحی گام اول: برای پیدا کردن نقاط تلاقی f و f^{-1} ، معادله $f(x) = x$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{mx + 6}{x + n} = x \Rightarrow x^2 + nx = mx + 6 \Rightarrow x^2 + (n - m)x - 6 = 0$$

گام دوم: مجموع و حاصل ضرب دو ریشه را تشکیل می‌دهیم: $P = -6 \Rightarrow -2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = 3$ (حاصل ضرب دو ریشه)

$$S = m - n \Rightarrow -2 + \alpha = m - n \xrightarrow{\alpha=3} m - n = 1$$

گام سوم: از رابطه $f^{-1}(\alpha + 1) = 1$ برای پیدا کردن معادله دومی شامل m و n استفاده می‌کنیم و با حل دستگاه، m و n را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(\alpha + 1) = 1 \Rightarrow f(1) = \alpha + 1 \xrightarrow{\alpha=3} f(1) = 4 \Rightarrow \frac{m + 6}{1 + n} = 4 \Rightarrow m + 6 = 4 + 4n \Rightarrow m - 4n = -2$$

$$\begin{cases} m - n = 1 & \xrightarrow{\text{ضرب در } -1} -m + n = -1 \\ m - 4n = -2 & \xrightarrow{\text{خودش}} m - 4n = -2 \end{cases} \oplus$$

$$\Rightarrow -3n = -3 \Rightarrow n = 1$$

$$m - n = 1 \Rightarrow m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2$$

$n = 1$ را در یکی از موارد بالا مثلاً $m - n = 1$ جای گذاری می‌کنیم:

$$m + n = 2 + 1 = 3$$

گام چهارم: $m = 2$ و $n = 1$ ، پس:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: ضابطه تابع خطی $f(x) = ax + b$ را فرض می‌کنیم، پس $f(-x) = a(-x) + b = -ax + b$ خواهد بود.

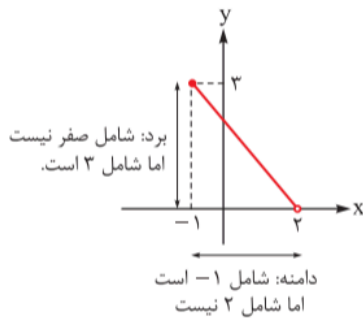
گام دوم: $f(x)$ و $f(-x)$ را در تساوی داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$2(ax + b) + (-ax + b) = 2x - 9 \Rightarrow ax + 3b = 2x - 9 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3b = -9 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

$$f(5) = 2 \times 5 - 3 = 7$$

گام سوم: در نتیجه ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2x - 3$ است و داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



پاسخ تشریحی گام اول: دامنه و برد تابع را در یک دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم. با توجه

به باز بودن یا بسته بودن سر و ته بازه‌های داده شده، فقط حالت مقابل برای نقاط روی نمودار تابع f

تصور می‌شود:

گام دوم: پس برای پیدا کردن ضابطه تابع f ، کافی است معادله خطی را بنویسیم که از دو نقطه $(-1, 3)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد:

$$\text{شیب خط: } m = \frac{0 - 3}{2 - (-1)} = -1$$

$$\text{معادله خط: } y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -(x - 2)$$

$$f(2 - \sqrt{2}) = 2 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

گام سوم: پس ضابطه تابع خطی f با دامنه $[-1, 2]$ به صورت $f(x) = 2 - x$ است و داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۰

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا با انتقال تابع اولیه ضابطه تابع جدید را می‌سازیم:

$$y = |x - a| + b \xrightarrow[\text{کل تابع با } (-1) \text{ جمع می‌شود}]{\text{یک واحد به پایین}} y = |x - 2 - a| + b \xrightarrow[\text{دو واحد به راست}]{x \rightarrow (x-2)} y = |x - (2+a)| + b - 1$$

گام دوم: تابع به دست آمده باید با تابع صورت سؤال یعنی $y = |x - b| + 2a$ مساوی باشد:

$$|x - (a+2)| + b - 1 = |x - b| + 2a \Rightarrow \begin{cases} a+2=b \\ b-1=2a \end{cases}$$

گام سوم: دستگاه دو معادله - دو مجهول را باید حل کنیم:

$$\begin{cases} b-a=2 \\ b-2a=1 \end{cases} \Rightarrow (b-a) - (b-2a) = 2-1 \Rightarrow a=1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b=3$$

گام چهارم: پس ضابطه تابع جدید $y = |x - 3| + 2$ است و مقدار آن به ازای $x = 5$ برابر است با:

$$y = |5 - 3| + 2 = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی

گام اول: ضریب x^2 باید برابر صفر باشد، پس داریم:

$$f(x) = ax^2 - a^2x - 2x + 2a + 2x^2 = (a+2)x^2 - (a^2+2)x + 2a$$

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow f(x) = -6x - 4$$

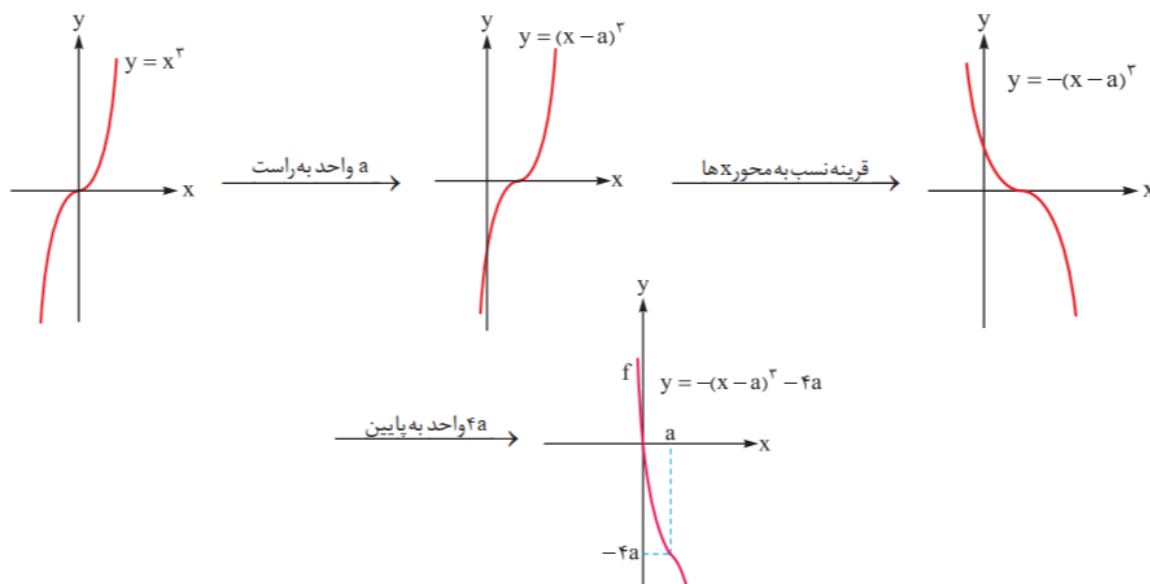
گام دوم: عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$(x - f(x))(x + f(x)) \geq 0 \Rightarrow (x + 6x + 4)(x - 6x - 4) \geq 0 \Rightarrow (7x + 4)(-5x - 4) \geq 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} \leq x \leq -\frac{4}{7}$$

دقت کنید که ریشه‌های عبارت‌های داخل پرانتزها، $-\frac{4}{5}$ و $-\frac{4}{7}$ هستند و چون ضریب x^2 منفی است، پس به ازای مقادیر بین دو ریشه، حاصل کل عبارت مثبت است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: نمودار تابع $y = x^r$ ابتدا a واحد به سمت راست رفته و نسبت به محور x ها قرینه می‌شود، سپس $\pm a$ واحد به سمت پایین می‌آید. این مراحل را به ترتیب بر روی $y = x^r$ پیاده می‌کنیم تا به ضابطه $f(x)$ برسیم:



گام دوم: تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است پس $f(0) = 0$ ، در نتیجه: $f(0) = 0 \Rightarrow -(0-a)^r - \pm a = 0$

$$\Rightarrow a^r - \pm a = 0 \Rightarrow a(a^r - \pm) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \times \\ a = \pm \checkmark \\ a = -\pm \times \end{cases}$$

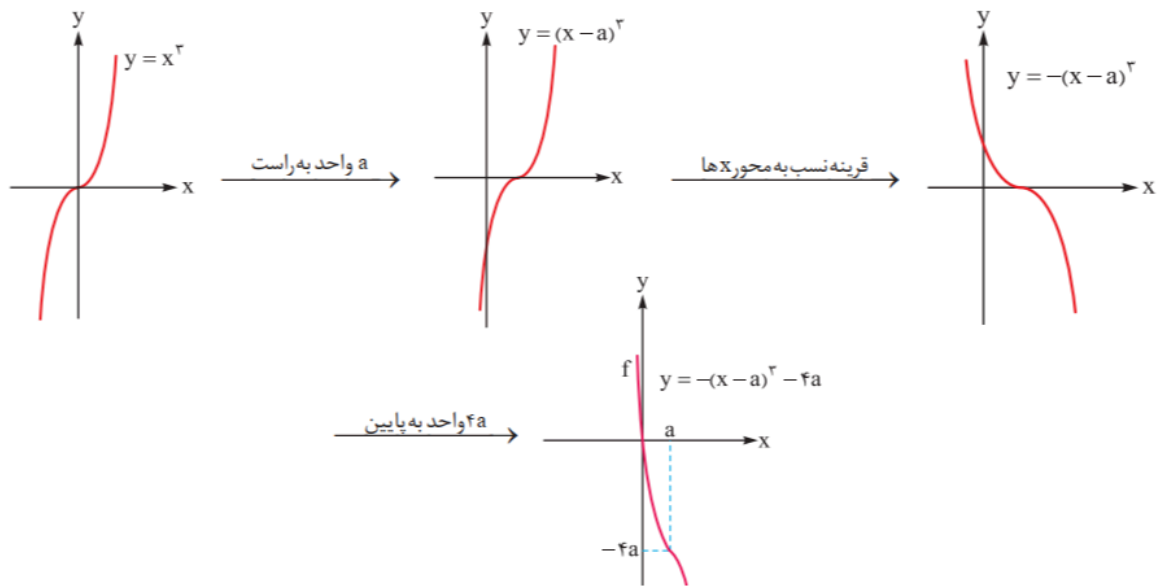
با توجه به نمودار واضح است که $a = \pm$.

گام سوم: با توجه به $a = \pm$ ، تابع f را بازنویسی می‌کنیم و سپس $f(2a)$ یعنی $f(\pm)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a = \pm \Rightarrow f(x) = -(x-\pm)^r - \pm \Rightarrow f(\pm) = -(\pm-\pm)^r - \pm = -\pm - \pm \Rightarrow f(\pm) = -\pm$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: نمودار تابع $y = x^3$ ابتدا a واحد به سمت راست رفته و نسبت به محور x قرینه می‌شود، سپس $4a$ واحد به سمت پایین می‌آید. این مراحل را به ترتیب بر روی $y = x^3$ پیاده می‌کنیم تا به ضابطه $f(x)$ برسیم:



گام دوم: تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است پس $f(0) = 0$ ، در نتیجه:

$$f(0) = 0 \Rightarrow -(0-a)^3 - 4a = 0$$

$$\Rightarrow a^3 - 4a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \times \\ a = 2 \checkmark \\ a = -2 \times \end{cases}$$

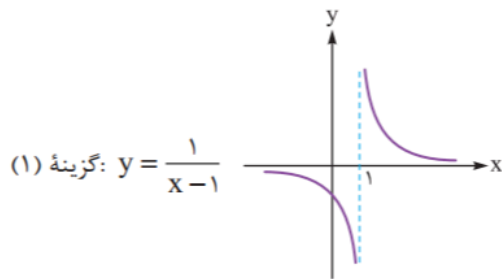
با توجه به نمودار واضح است که $a = 2$.

گام سوم: با توجه به $a = 2$ ، تابع f را بازنویسی می‌کنیم و سپس $f(2a)$ یعنی $f(4)$ را محاسبه می‌کنیم:

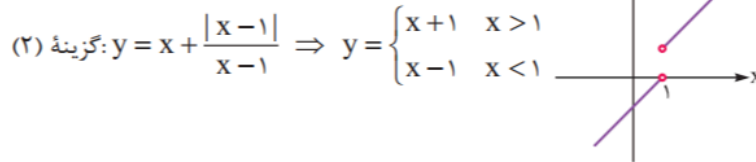
$$a = 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2)^3 - 8 \Rightarrow f(4) = -(4-2)^3 - 8 = -8 - 8 \Rightarrow f(4) = -16$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

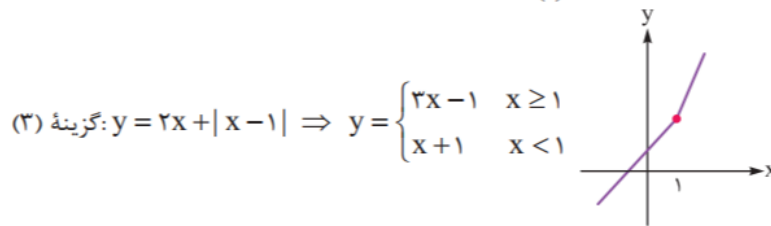
گام اول: نمودار مربوط به هر گزینه را رسم می‌کنیم:



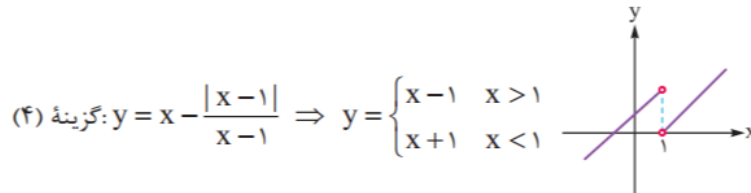
این تابع در $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است.



این تابع در $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است و در دامنه‌اش که $\mathbb{R} - \{1\}$ است نیز صعودی است.



این تابع نیز در $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است و در دامنه‌اش که $\mathbb{R}$ است نیز صعودی است.

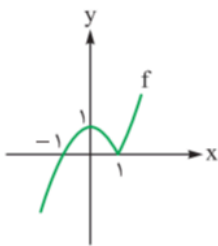


این تابع در $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است ولی در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R} - \{1\}$ یکنوا نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: با توجه به وجود قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = (x+1)|x-1| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-1) & x \geq 1 \\ -(x+1)(x-1) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$



گام دوم: حال تابع f را با توجه به بازه‌های به‌دست‌آمده رسم می‌کنیم:

گام سوم: طبق نمودار، تابع f در بازه $(0, 1)$ اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر می‌شود با $1-0=1$ ، یعنی گزینه (۲).

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: ابتدا در ضابطه $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم تا $f(g(2))$ را به دست آوریم:

$$f(g(x)) = x^2 + x - 2 \Rightarrow f(g(2)) = 2^2 + 2 - 2 \Rightarrow f(g(2)) = 4$$

گام دوم: از آنجا که ضابطه f را داریم، به جای x ، $g(2)$ را می‌گذاریم و چون $f(g(2)) = 4$ ، خواهیم داشت:

$$f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f(g(2)) = (g(2))^2 - g(2) - 2 = 4$$

$$\Rightarrow (g(2))^2 - g(2) - 6 = 0 \Rightarrow (g(2) - 3)(g(2) + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(2) = 3 \\ g(2) = -2 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن $g(2)$ برابر $3 \times (-2) = -6$ یعنی گزینه (۱) است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: دامنه تابع خطی g ، کل اعداد حقیقی است:

$$D_g = \mathbb{R}$$

و تعریف $D_{f \circ g}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (1-3x) \in [-4, a]\}$$

گام دوم: نامعادله تعریف بالا را حل می‌کنیم:

$$-4 \leq 1-3x \leq a \xrightarrow{\times(-1)} -a \leq 3x-1 \leq 4 \xrightarrow{+1} 1-a \leq 3x \leq 5 \xrightarrow{\div 3} \frac{1-a}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$$

گام سوم: این یعنی ما براساس تعریف دامنه تابع $f \circ g$ را بازه $[\frac{1-a}{3}, \frac{5}{3}]$ به دست آورده‌ایم. پس طبق فرض سؤال، این بازه باید

مساوی بازه $[-2, b]$ باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{3} = -2 \Rightarrow 1-a = -6 \Rightarrow a = 7 \\ b = \frac{5}{3} \end{cases}$$

گام چهارم: مطلوب مسئله برابر است با:

$$a - b = 7 - \frac{5}{3} = \frac{16}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: طبق تعریف تابع قدرمطلق داریم:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

دامنه تابع f شامل مقادیری است که مخرج کسر مخالف صفر باشد، بنابراین داریم:

$$|x| - x \neq 0 \Rightarrow |x| \neq x \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

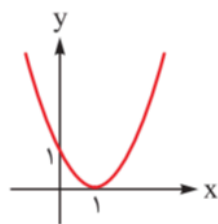
به ازای مقادیر منفی x ، $|x| = -x$ است، پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \frac{1}{-2x}$ در می‌آید.

گام دوم: برد تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$x < 0 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow \frac{1}{-2x} > 0 \Rightarrow R_f = (0, +\infty)$$

مقادیر برد تابع f نقش ورودی تابع g را در تابع $g \circ f$ دارا هستند.

گام سوم: نمودار تابع $g(x)$ را رسم می‌کنیم.



واضح است به ازای ورودی‌های مثبت، حاصل $g(x)$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس داریم:

$$R_{g \circ f} = [0, +\infty)$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: دامنه تابع $g \circ f$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم: ابتدا دامنه تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty) \quad (*)$$

گام سوم: حالا باید $f(x)$ در دامنه تابع g قرار بگیرد:

$$g(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-2} \neq 1 \Rightarrow x-2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \quad (**)$$

گام چهارم: بین $(*)$ و $(**)$ اشتراک می‌گیریم تا دامنه تابع $g \circ f$ به دست بیاید.

$$D_{g \circ f} = [2, +\infty) \cap (\mathbb{R} - \{3\}) = [2, +\infty) - \{3\}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: می‌خواهیم دامنه تابع $g(x)$ را به دست آوریم. پس این تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x) = \sqrt{f(1-x)} = \sqrt{\frac{|1-x-4|}{3+2(1-x)-(1-x)^2}} = \sqrt{\frac{|x+3|}{4-x^2}}$$

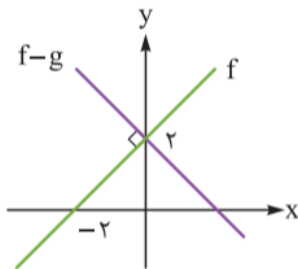
گام دوم: زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد و مخرج کسر ناصفر، پس:

$$\frac{|x+3|}{4-x^2} \geq 0 \xrightarrow{\text{صورت نامنفی}} 4-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$

از طرفی $x = -3$ ریشه صورت نیز هست، پس دامنه تابع g به صورت $D_g = (-2, 2) \cup \{-3\}$ می‌شود.

گام سوم: پس $a = -2$ ، $b = 2$ و $c = -3$ است. در نتیجه $a + b + c = -3$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



گام اول: با توجه به نمودارهای داده‌شده، ضابطه توابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (0, 2) \\ (-2, 0) \end{cases} \Rightarrow f(x) - 0 = \frac{2-0}{0-(-2)}(x-(-2)) \Rightarrow f(x) = x+2$$

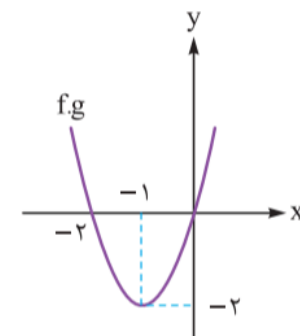
خط $f-g$ بر خط f عمود است؛ پس شیب خط $f-g$ برابر است با:

$$\begin{cases} m_{f-g} = \frac{-1}{m_f} = \frac{-1}{1} = -1 \\ (0, 2) \end{cases} \Rightarrow (f-g)(x) = -x+2$$

گام دوم: حالا می‌توانیم ضابطه تابع g را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = -x+2 \\ f(x) = x+2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = 2x$$

$$f(x) \cdot g(x) = 2x(x+2)$$



(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۳

گام اول: ابتدا تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشخص می‌کنیم که وضعیت صعودی یا نزولی بودن این تابع چگونه است:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4 & x \geq 4 \\ 2x + 4 & x < 4 \end{cases}$$

می‌بینیم که در هر دو بازه، تابع f در $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی است.

گام دوم: برای تابع اکیداً صعودی، رابطه $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ را داریم؛ بنابراین:

$$f(m^2 - 2m + 1) < f(4m - m^2 - 3) \Rightarrow m^2 - 2m + 1 < 4m - m^2 - 3$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 6m + 4 < 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-1) < 0$$

m	1	2	
$m^2 - 3m + 2$	$+$	$-$	$+$

جواب: $1 < m < 2$

گام سوم: پس $[m] = 1$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۴

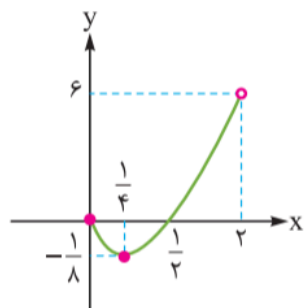
گام اول: برای این که بتوانیم برد تابع gof را پیدا کنیم، باید برد تابع f را پیدا کنیم. پس به سراغ تابع f می‌رویم.

$$f(x) = 2x - 2[x] = 2(x - [x])$$

می‌دانیم همواره رابطه $x - 1 < [x] \leq x$ برقرار است، پس $0 \leq x - [x] < 1$ می‌شود. بنابراین $0 \leq f(x) < 2$ است.

گام دوم: حالا باید به سراغ تابع g برویم. برد تابع g را با دامنه ورودی $[0, 2]$ به دست می‌آوریم تا همان برد تابع gof به دست

بیاید. از رسم نمودار کمک می‌گیریم:



x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2
$g(x)$	0	$\frac{-1}{8}$	0	6

گام سوم: پس با توجه به نمودار، $R_{\text{gof}} = [\frac{-1}{8}, 6)$ می‌شود، طول این بازه برابر با $\frac{49}{8} - (\frac{-1}{8}) = 6$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: از روی نمودار مشخص است که دامنه و برد تابع $y = 2f(x-3)$ به ترتیب برابر با $[-3, 6]$ و $[-1, 4]$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \Rightarrow -6 \leq \underbrace{x-3}_{\text{ورودی } f} \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 4 \Rightarrow -1 \leq 2f(x-3) \leq 4 \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq f(x-3) \leq 2 \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq f(u) \leq 2 \end{cases}$$

گام دوم: پس $D_f = [-6, 3]$ و $R_f = [\frac{-1}{2}, 2]$ است.

گام سوم: حالا اشتراک دامنه و برد تابع f را به دست می‌آوریم:



$$R_f \cap D_f = [\frac{-1}{2}, 2]$$

این بازه شامل سه عدد صحیح $\{0, 1, 2\}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

کل عبارت $-2[\frac{2x}{3}]$ باید در دامنه تعریف تابع f قرار بگیرد، یعنی:

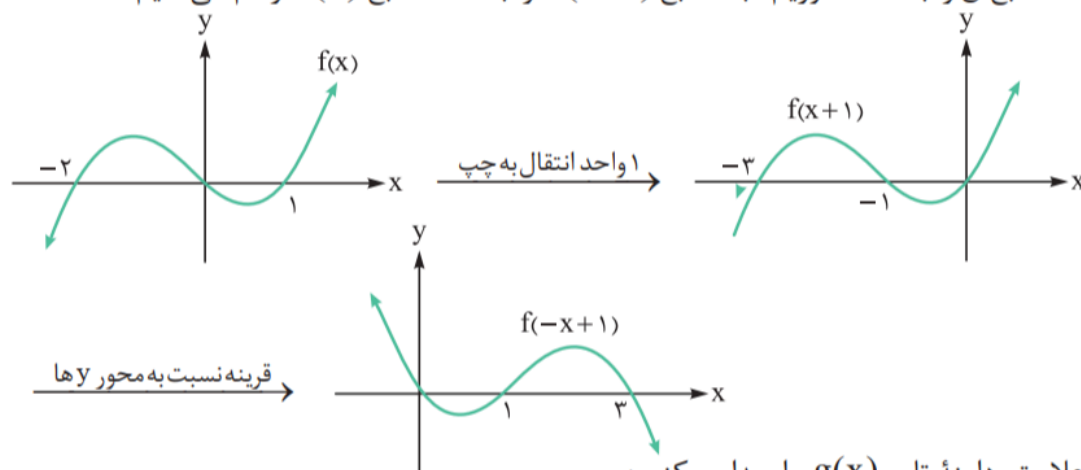
$$-4 \leq -2[\frac{2x}{3}] \leq 2 \xrightarrow{\div (-2)} -1 \leq [\frac{2x}{3}] \leq 2$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جزء صحیح}} -1 \leq \frac{2x}{3} < 3 \Rightarrow -3 \leq 2x < 9 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x < \frac{9}{2}$$

بنابراین $D_y = [-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: برای این که بتوانیم دامنه تابع g را به دست آوریم، ابتدا تابع $f(1-x)$ را به کمک تابع $f(x)$ رسم می کنیم:



گام دوم: حالا به کمک تعیین علامت، دامنه تابع $g(x)$ را پیدا می کنیم:

$$g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{f(1-x)}} \Rightarrow \frac{f(x)}{f(1-x)} \geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه یابی}} \begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow x = -2, 0, 1 \\ f(1-x) = 0 &\Rightarrow x = 0, 1, 3 \end{aligned}$$

x	-2	0	1	3
f(x)	-	+	-	+
f(1-x)	+	+	-	+
$\frac{f(x)}{f(1-x)}$	-	+	+	-

گام سوم: پس $D_g = [-2, 3] - \{0, 1\}$ است. این بازه شامل ۳ عدد صحیح $\{-2, -1, 2\}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گزینه ها را به طور جداگانه بررسی می کنیم:

گزینه (۱): تابع $y = \tan x$ به ازای $x = \frac{3\pi}{4}$ تعریف نشده است، پس این تابع نمی تواند در بازه $(\pi, 2\pi)$ صعودی باشد.

گزینه (۲): اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، آن گاه دامنه توابع $y = f(3x)$ و $y = f(5x)$ نیز برابر $\mathbb{R}$ است، پس برد این دو تابع نیز برابر برد تابع $y = f(x)$ و در نتیجه یکسان خواهد بود.

گزینه (۳): ابتدا دامنه توابع f و f^{-1} را تعیین می کنیم:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 4 + \sqrt{x-1} \geq 4 \Rightarrow R_f = [4, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [4, +\infty)$$

طبق تعریف دامنه تابع مرکب $f^{-1} \circ f$ داریم:

$$D_{f^{-1} \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \geq 1 \mid 4 + \sqrt{x-1} \geq 4\}$$

رابطه $4 + \sqrt{x-1} \geq 4$ همواره برقرار است، پس $D_{f^{-1} \circ f} = [1, +\infty)$ است.

گزینه (۴): طبق تعریف ارائه شده در درس باکس، تابع $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ از انبساط افقی تابع $y = f(x)$ با ضریب ۳ حاصل می شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۹

گام اول: تغییرات انجام شده روی تابع $y = f(x)$ برای تبدیل آن به تابع $y = -3f(1-2x) - 2$ را بررسی می‌کنیم.

$$y = f(x) \xrightarrow{x \text{ ها را نصف می‌کنیم}} y = f(1-2x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y = f(-x+1) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = f(x+1) \xrightarrow{\text{عرض‌ها را } (-3) \text{ برابر می‌کنیم}} y = -3f(1-2x) \xrightarrow{\text{دو واحد به پایین}} y = -3f(1-2x) - 2$$

گام دوم: با توجه به توضیحات گام اول، مختصات نقطه A' (نقطه متناظر A) را روی نمودار $y = f(x)$ پیدا می‌کنیم.

$$x_{A'} = 1 - 2x_A = 1 - 2(2) = -3$$

$$y_A = -3y_{A'} - 2 = 1 \Rightarrow -3y_{A'} = 3 \Rightarrow y_{A'} = -1$$

بنابراین $A'(-3, -1)$ نقطه متناظر A روی تابع $y = f(x)$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۰

گام اول: فرض کنید تابع حاصل از قرینه شدن و انتقال تابع f را g بنامیم. در این صورت داریم:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y = \frac{-x+1}{-x-2} = \frac{x-1}{x+2}$$

$$\xrightarrow{2 \text{ واحد انتقال در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} y = \frac{x-1}{x+2} + 2 = \frac{3x+3}{x+2}$$

بنابراین $g(x) = \frac{3x+3}{x+2}$ است.

گام دوم: مختصات نقاط تلاقی f و g را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} = \frac{3(x+1)}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3x - 6 = x + 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر x در یکی از دو تابع، عرض نقاط را نیز به دست می‌آوریم:

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow A(-1, 0)$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{5}{2} \Rightarrow B(4, \frac{5}{2})$$

گام سوم: شیب خط گذرنده از نقاط A و B را محاسبه می‌کنیم.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{5}{2} - 0}{4 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۱

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4), (1, 5)\}$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

حال تابع ارائه شده در هر یک از گزینه ها را به دست می آوریم:

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2), (1, 6)\}$$

گزینه (۱):

$$f^{-1} + g = \{(2, 4), (5, 8), (4, 5)\}$$

گزینه (۲):

$$f + g^{-1} = \{(1, 5), (2, 9), (3, 6)\}$$

گزینه (۳):

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \{(2, 3), (5, 4), (4, 2)\}$$

گزینه (۴):

بنابراین تعداد اعضای تابع $g \circ f^{-1}$ در گزینه (۱) از سایر گزینه ها بیشتر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۲

گام اول: تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ فقط در صورتی یک به یک نیست که $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ و یا به عبارت دیگر $ad = bc$ باشد؛ بنابراین داریم:

$$y = \frac{3x+1}{2x+a} \xrightarrow{\text{تابع یک به یک نیست.}} 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

گام دوم: مقدار a را در تابع $y = \frac{ax+b}{x+b}$ جای گذاری و وارون آن را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{\frac{2}{3}x+2}{x+b} \xrightarrow{\text{وارون تابع}} f^{-1}(x) = \frac{-bx+2}{x-\frac{2}{3}}$$

گام سوم: دو تابع f و f^{-1} را برابر هم قرار می دهیم:

$$\frac{\frac{2}{3}x+2}{x+b} = \frac{-bx+2}{x-\frac{2}{3}} \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۳

گام اول: تابع $f \circ g$ را محاسبه می کنیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 - \frac{2 \times 6}{3x-5} = \frac{9x-27}{3x-5}$$

گام دوم: وارون تابع $f \circ g$ را پیدا می کنیم. می دانیم وارون تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس داریم:

$$(f \circ g)(x) = \frac{9x-27}{3x-5} \xrightarrow{\text{وارون}} (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{5x-27}{3x-9}$$

گام سوم: با توجه به رابطه $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ ، خواسته سؤال را پیدا می کنیم:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{5x-27}{3x-9}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(3x) \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} (g^{-1} \circ f^{-1})(1) = \frac{5(1)-27}{3(1)-9} = \frac{-22}{-6} = \frac{11}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۴

گام اول: دهانه سهمی به معادله $y = x^2 + mx + m$ رو به بالا باز می‌شود، پس شرط یک‌به‌یک بودن تابع $y = f(x)$ آن است که طول رأس سهمی کوچک‌تر یا مساوی -1 باشد و در نقطه‌ای به طول $x = -1$ ، عرض ضابطه اول تابع، بزرگ‌تر از عرض ضابطه دوم آن باشد.

گام دوم: نامساوی‌های مربوط به گام اول را می‌نویسیم و اشتراک جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} \leq -1 \Rightarrow m \geq 2 \\ (-1)^2 + m(-1) + m \geq 2(-1) + m \Rightarrow m \leq 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 \leq m \leq 3$$

بنابراین بیشترین مقدار m برابر ۳ است.

گام سوم: به ازای $m = 3$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3; & x \geq -1 \\ 2x + 3; & x < -1 \end{cases}$$

برد ضابطه بالایی به صورت $y \geq 1$ و برد ضابطه پایینی به صورت $y < 1$ است، پس مقدار $y = 1$ مربوط به ضابطه بالایی می‌شود. **گام چهارم:** فرض کنید $f^{-1}(y) = a$ باشد. در این صورت داریم:

$$f^{-1}(y) = a \Rightarrow f(a) = y \Rightarrow a^2 + 3a + 3 = y \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a+4)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \text{ ق.ق. غ.} \\ a = 1 \text{ ق.ق. ق.} \end{cases}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۵

گام اول: ابتدا تابع f^{-1} را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 3x - 5x + 1; & x \geq 0 \\ -3x - 5x + 1; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} -2x + 1; & x \geq 0 \\ -8x + 1; & x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به ضابطه تابع f^{-1} ، این تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و در نتیجه طبق درس باکس داریم:

$$\begin{aligned} -1 \leq f(x) \leq 3 &\Rightarrow f^{-1}(3) \leq f^{-1}(f(x)) \leq f^{-1}(-1) \xrightarrow{f^{-1}(f(x))=x} f^{-1}(3) \leq x \leq f^{-1}(-1) \Rightarrow -5 \leq x \leq 9 \\ &\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} \{-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 9\} \end{aligned}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، شامل ۱۵ عدد صحیح است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۶

گام اول: فرض می‌کنیم $(gof)^{-1}(9) = \alpha$ ، پس $(gof)(\alpha) = 9$.

$$(gof)(\alpha) = 9 \Rightarrow g(f(\alpha)) = 9$$

گام دوم: با توجه به رابطه به‌دست‌آمده در گام اول، $f(\alpha)$ را در ضابطه g جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g(f(\alpha)) = 9 \xrightarrow{g(x)=1+x^2} 1+(f(\alpha))^2 = 9 \Rightarrow (f(\alpha))^2 = 8 \Rightarrow f(\alpha) = 2$$

گام سوم: حال مختصات نقطه $(\alpha, 2)$ را در ضابطه f جاگذاری کنیم تا خواسته سؤال به دست آید:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2} \xrightarrow{(\alpha, 2) \in f} 2 = 1 + \sqrt{\alpha-2} \Rightarrow \sqrt{\alpha-2} = 1 \Rightarrow \alpha-2 = 1 \Rightarrow \alpha = 3$$

در نتیجه $(gof)^{-1}(9)$ برابر ۳ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۷

گام اول: نمودار رسم‌شده مربوط به تابع $f(x) = a(x+1)^2 + 2$ است و از آن‌جا که در ضابطه تابع داده‌شده، ضریب x^2 برابر ۲ است:

$$f(x) = 2x^2 + \dots$$

نتیجه می‌گیریم $a = 2$ است.

گام دوم: پس $f(x) = 2(x+1)^2 + 2$ است و داریم:

$$y_B = f(0) = 2(1)^2 + 2 = 4$$

$$f(x_A) = 2(x_A+1)^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x_A+1)^2 = -1 \Rightarrow x_A = -2$$

گام سوم: پس مساحت مثلث قائم‌الزاویه AOB برابر است با: $\frac{2 \times 4}{2} = 4$.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۸

گام اول: ابتدا به کمک مکعب دو جمله و مخرج مشترک‌گیری ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - \frac{(x+1)^3}{x+3} \Rightarrow f(x) = x^2 - \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x+3}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1}{x+3} \Rightarrow f(x) = \frac{-3x-1}{x+3}$$

گام دوم: تابع f هموگرافیک است، با توجه به نکته گفته‌شده چون $(+3) + (-3) = 0$ پس f و f^{-1} با یکدیگر برابرند، در نتیجه:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{-3x-1}{x+3} = \frac{ax+b}{2x+d} \xrightarrow[\text{را در ۲ ضرب می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج کسر سمت چپ}} \frac{-6x-2}{2x+6} = \frac{ax+b}{2x+d} \Rightarrow b = -2$$

گام سوم: خواسته سؤال $f^{-1}(b)$ است که چون f و f^{-1} برابرند همان $f(b)$ است، در نتیجه:

$$f^{-1}(b) = f(b) \xrightarrow[b=-2]{f(x) = \frac{-3x-1}{x+3}} f(-2) = \frac{-3(-2)-1}{(-2)+3} = \frac{5}{1} \Rightarrow f^{-1}(-2) = f(-2) = 5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

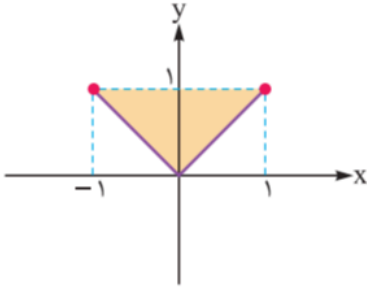
۲۰۹

گام اول: دامنه تابع f بازه $[-1, 1]$ و برد آن بازه $[0, 1]$ است و از آنجا که $R_f \subseteq D_f$ ، دامنه تابع $f \circ f$ همان D_f یعنی بازه $[-1, 1]$ است.

حال می‌رویم سراغ ضابطه تابع $f \circ f$:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{1 - f^2(x)} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

گام دوم: نمودار تابع $(f \circ f)(x) = |x|$ را با دامنه $[-1, 1]$ رسم می‌کنیم.



مثلث هاشورخورده سطح مورد نظر است که مساحت آن برابر است با $\frac{2 \times 1}{2} = 1$.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۰

گام اول (ساختن $g(x) = -2f(a - \frac{x}{3})$):

$$f(x) = ax^2 - 4ax = a(x-2)^2 - 4a \xrightarrow{x \rightarrow (a - \frac{x}{3})} f(a - \frac{x}{3}) = a(a - \frac{x}{3} - 2)^2 - 4a$$

$$\xrightarrow{x(-2)} g(x) = -2a(\frac{x}{3} - a + 2)^2 + 8a = -\frac{2a}{9}(x - (3a - 6))^2 + 8a$$

گام دوم (به دست آوردن مقدار a): با توجه به این که سهمی با محدود کردن دامنه‌اش (قبل یا بعد رأس سهمی) یکنواست؛ پس

از آنجا که $[-2, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع در آن اکیداً نزولی است، پس $x = -2$ طول رأس سهمی است؛ پس:

$$x_s = 3a - 6 = -2 \Rightarrow 3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۱

گام اول: دامنه تعریف تابع $\sqrt{x}$ را تعیین می‌کنیم که به صورت $x \geq 0$ است. پاسخ تشریحی

گام دوم: دامنه تعریف تابع $\frac{\sqrt{\sqrt{20} - x}}{10 - x}$ را تعیین می‌کنیم. در این تابع، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی و مخرج مخالف صفر باشد.

$$\begin{cases} \sqrt{20} - x \geq 0 \Rightarrow x \leq \sqrt{20} \\ 10 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \leq \sqrt{20}$$

گام سوم: دامنه تعریف تابع $f(x)$ ، اشتراک بازه‌های به دست آمده در گام‌های اول و دوم است.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \sqrt{20} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \leq x \leq \sqrt{20} \Rightarrow D_f = [0, \sqrt{20}]$$

با توجه به این که $4 < \sqrt{20} < 5$ ، پس دامنه تابع f شامل ۵ عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۲

پاسخ تشریحی گام اول: دامنه تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم.

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

گام دوم: با توجه به دامنه تعریف تابع f داریم:

$$|2 - x| = |x - 2| = 2 - x$$

گام سوم: براساس مقدار قدرمطلق در گام قبل، تابع داده‌شده در هر یک از گزینه‌ها را ساده می‌کنیم.

$$\textcircled{1} g(x) = \sqrt{(x-2)^2(2-x)} = |x-2|\sqrt{2-x} = (2-x)\sqrt{2-x} \neq f(x)$$

$$\textcircled{2} h(x) = \sqrt{(2-x)^2} = \sqrt{(2-x)^2(2-x)} = |2-x|\sqrt{2-x} = (2-x)\sqrt{2-x} \neq f(x)$$

$$\textcircled{3} I(x) = -\sqrt{(2-x)^2} = -h(x) = (x-2)\sqrt{2-x} = f(x)$$

$$\textcircled{4} k(x) = \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2(x-2)} = |x-2|\sqrt{x-2} = (2-x)\sqrt{x-2} \neq f(x)$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۳

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا دامنه تعریف تابع $f+g$ را تعیین می‌کنیم.

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} D_f = [1, +\infty) \\ D_g = [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, +\infty)$$

گام دوم: دامنه تعریف تابع $y = (f+g)^2(x) + h(x)$ را تعیین می‌کنیم.

$$D_y = D_{(f+g)} \cap D_h = [1, +\infty) \cap \mathbb{R} = [1, +\infty)$$

گام سوم: ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$$y = (f+g)^2(x) + h(x) = (x - \sqrt{x-1} + x + \sqrt{x-1})^2 + x = (2x)^2 + x \Rightarrow y = 4x^2 + x$$

ضابطه تابع را به صورت مربع کامل درمی‌آوریم:

$$y = 4x^2 + x = 4\left(x^2 + \frac{1}{4}x\right) = 4\left(x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{64}\right) - \frac{1}{16} = 4\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

با توجه به دامنه تعریف تابع، برد آن را تعیین می‌کنیم.

$$x \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{8} \geq \frac{9}{8} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 \geq \frac{81}{64} \Rightarrow 4\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 \geq \frac{81}{16} \Rightarrow 4\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} \geq \frac{80}{16}$$

$$\Rightarrow y \geq 5$$

یعنی برد تابع به صورت $[5, +\infty)$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۴

پاسخ تشریحی گام اول: در ابتدا، باید ضابطه‌های دو تابع f و g را به دست آوریم:

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌های } f \text{ موجودند}} f(x) = a(x+1)(x-3) \xrightarrow[\substack{\text{عرض رأس} = \lambda \\ x_s = \frac{-1+3}{2} = 1}]{\lambda = a(2)(-2)} \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = -2(x+1)(x-3)$$

$$\Rightarrow g(x) = -2x + 6$$

$$g^{-1}(2) = k \Rightarrow g(k) = 2$$

$$\Rightarrow -2k + 6 = 2 \Rightarrow k = 2$$

تابع خطی g هم از نقاط $(0, f(0)) = (0, 6)$ و $(3, 0)$ می‌گذرد:گام دوم: باید $g^{-1}(2)$ را پیدا کنیم؛ آن را k می‌نامیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\begin{cases} x = -2 \Rightarrow R_1 = -2f(-1) = 6 \Rightarrow f(-1) = -3 \\ x = -2 \Rightarrow R_2 = -f(-2) = 4 \Rightarrow f(-2) = -4 \end{cases}$$

$$x = -1 \Rightarrow R = f(-2) + f(-1) = -4 - 3 = -7$$

۲۱۵

(دیاژ ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است. کافی است وقتی آن را قطعه‌ای در نظر می‌گیریم، در هر قطعه هم صعودی اکید باشد. با توجه به ریشه عبارات داخل قدرمطلق، داریم:

$$\begin{cases} x \leq -1: f(x) = -2x - mx - m + 3x = (1-m)x - m \\ -1 < x < 0: f(x) = -2x + mx + m + 3x = (m+1)x + m \\ x \geq 0: f(x) = 2x + mx + m + 3x = (m+5)x + m \end{cases}$$

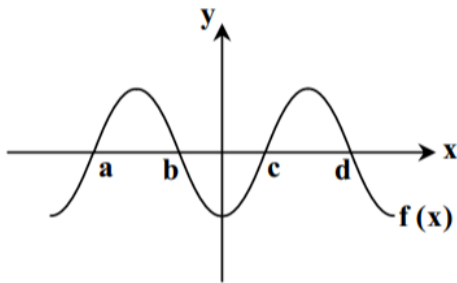
تابع f به شرطی اکیداً صعودی است که شیب خطوط به دست آمده در هر ۳ ضابطه مثبت باشند:

$$\begin{cases} 1-m > 0 \Rightarrow m < 1 \\ m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \\ m+5 > 0 \Rightarrow m > -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < m < 1 \Rightarrow |m| < 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

فرض می‌کنیم اعداد $x = a, b, c, d$ ، ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ باشند؛ بنابراین:

۲۱۷



$$a + b + c + d = 12 \quad (*)$$

برای رسم نمودار تابع $y = f(-4x + 1)$ ، کافی است یک واحد از طول نقاط کم کرده و سپس حاصل را در $-\frac{1}{4}$ ضرب کنیم؛ بنابراین مجموع

صفرهای تابع $y = f(-4x + 1)$ برابر است با:

$$\frac{a-1}{-4} + \frac{b-1}{-4} + \frac{c-1}{-4} + \frac{d-1}{-4} = \frac{a+b+c+d-4}{-4}$$

با توجه به رابطه (*). داریم:

$$y = f(1-4x) \text{ مجموع صفرهای تابع } = \frac{12-4}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

با توجه به فرض سؤال و نکته داریم:

۲۱۸

$$\text{fog}(x) = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow g(x) = f^{-1}\left(\frac{2x}{1-x}\right) \quad (*)$$

چون $f^{-1}(4) = 3$ ؛ بنابراین:

$$\frac{2x}{1-x} = 4 \Rightarrow 2x = 4 - 4x \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(*) \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} g\left(\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(4) \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \Rightarrow g^{-1}(3) = \frac{2}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۹

با توجه به نکته، برای اینکه معادله $f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x)$ فقط یک جواب داشته باشد، باید دامنه و برد تابع f فقط در یک نقطه مشترک باشند؛ بنابراین:

$$\sqrt{x+4b} \geq 0 \Rightarrow -3\sqrt{x+4b} \leq 0 \Rightarrow 12-3\sqrt{x+4b} \leq 12 \Rightarrow f(x) \leq 12 \Rightarrow R_f = (-\infty, 12]$$

پس دامنه f باید بازه $[12, +\infty)$ باشد تا $D_f \cap R_f = \{12\}$ ؛ بنابراین:

$$x+4b \geq 0 \Rightarrow x \geq -4b \xrightarrow{x \geq 12} -4b = 12 \Rightarrow b = -3$$

خواسته سؤال $f^{-1}(b)$ ، یعنی $f^{-1}(-3)$ است؛ با فرض $f^{-1}(-3) = k$ داریم:

$$f(x) = 12-3\sqrt{x-12} \xrightarrow{f(k)=-3} 12-3\sqrt{k-12} = -3 \Rightarrow 5 = \sqrt{k-12} \Rightarrow k-12 = 25 \Rightarrow k = 37 \Rightarrow f^{-1}(-3) = 37$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۰

ابتدا ضابطه $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = f(-2x+1) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}]{x \rightarrow -x} y = f(2x+1) \xrightarrow[\text{۴ واحد به چپ}]{x \rightarrow x+4} y = f(2(x+4)+1) \Rightarrow g(x) = f(2x+9)$$

اکنون وارون $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = y = f(2x+9) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(2x+9)) \Rightarrow f^{-1}(y) = 2x+9 \Rightarrow 2x = f^{-1}(y) - 9 \Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) - 9}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x) - 9}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۱

مراحل رسم تابع $y = 3f^{-1}(2x)$ با استفاده از $y = 3f(2x)$ و محاسبه دامنه و برد آن در هر مرحله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y = 3f(2x) \\ D = [-2, 4] \\ R = [-3, 3] \end{cases} \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ برابر عمودی}]{y = \frac{1}{3} \times 3f(2x)} \begin{cases} y = \frac{1}{3} \times 3f(2x) \\ D = [-2, 4] \\ R = [-1, 1] \end{cases} \xrightarrow[2 \text{ برابر افقی}]{y = f(2 \times \frac{x}{2}) = f(x)} \begin{cases} y = f(2 \times \frac{x}{2}) = f(x) \\ D = [-4, 8] \\ R = [-1, 1] \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ربع اول و سوم}]{\text{قرینه نسبت به نیمساز}} \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ D = [-1, 1] \\ R = [-4, 8] \end{cases} \xrightarrow[3 \text{ برابر عمودی}]{y = 3f^{-1}(x)} \begin{cases} y = 3f^{-1}(x) \\ D = [-1, 1] \\ R = [-12, 24] \end{cases} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ برابر افقی}]{y = 3f^{-1}(2x)} \begin{cases} y = 3f^{-1}(2x) \\ D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ R = [-12, 24] \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۲

حد تابع $f(x) = \frac{3x+1}{-x+1}$ در بی‌نهایت، برابر -3 است. برای یافتن حد تابع $[f(x)]$ در بی‌نهایت باید توجه کرد که در $+\infty$ مقادیر $f(x)$ کمتر از -3 هستند؛ زیرا:

$$f(x) = \frac{3x+1}{-x+1} = \frac{-3(-x+1)+4}{-x+1} = -3 + \frac{4}{-x+1}$$

وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مقدار کسر $\frac{4}{-x+1}$ عددی منفی است، پس $f(x) < -3$ و داریم $f(x) \rightarrow -3^-$ ؛ بنابراین $[f(x)] = -4$ ، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x+1}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-3 + \frac{4}{-x-1} \right] = [-3^-] = -4$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۳

نکته: اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌های اول یکسان نباشند.

دو زوج مرتب $(1, a)$ و $(1, a^2 - 12)$ دارای مؤلفه اول یکسان هستند، پس مؤلفه دوم آن‌ها هم باید یکسان باشد:

$$a^2 - 12 = a \Rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+3) = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ یا } a = -3$$

اکنون قابل قبول بودن هریک از مقادیر را بررسی می‌کنیم:

$$a = 4 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 2), (3, 2), (0, -3)\} \quad \times \text{ تابع نیست}$$

$$a = -3 \Rightarrow f = \{(1, -3), (2, 2), (3, -3), (0, -3)\} \quad \checkmark \text{ تابع است}$$

پس فقط $a = -3$ قابل قبول است.

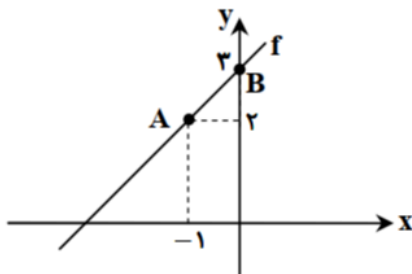
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۴

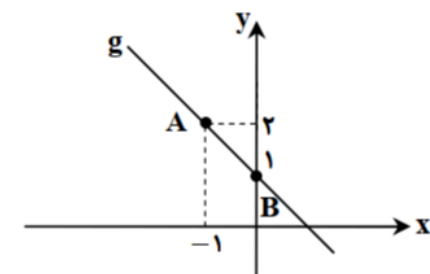
نکته ۱: تابع $y = mx + h$ را یک تابع «خطی» می‌گوییم که در آن m شیب خط و h عرض از مبدأ یعنی محل برخورد تابع با محور y ها می‌باشد.

نکته ۲: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه از تابع خطی $y = mx + h$ باشند، شیب تابع از رابطه $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ محاسبه می‌شود.

ابتدا معادله دو تابع را می‌نویسیم:



$$f: \begin{cases} A(-1, 2) \\ B(0, 3) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3-2}{0-(-1)} = 1 \xrightarrow{h=3} y = x + 3 \Rightarrow f(x) = x + 3$$



$$g: \begin{cases} A(-1, 2) \\ B(0, 1) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1-2}{0-(-1)} = -1 \xrightarrow{h=1} y = -x + 1 \Rightarrow g(x) = -x + 1$$

$$y = f(x) + g(x) \Rightarrow y = (x + 3) + (-x + 1) \Rightarrow y = 4$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۵

نکته ۱: تابعی را که برد آن فقط شامل یک عضو باشد، تابع «ثابت» می‌گویند. اگر این عضو k باشد، تابع ثابت را به صورت $y = k$ نمایش می‌دهند.

نکته ۲: تابعی را که هر عضو از دامنه را دقیقاً به همان عضو در برد نظیر می‌کند، تابع «همانی» می‌گویند. ضابطه تابع همانی به صورت $y = x$ است.

$$f = \{(a+b, 3), (5, 3a-b)\} \xrightarrow{f \text{ تابع همانی}} \begin{cases} a+b=3 \\ 3a-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$g(x) = (x+1)^2 - cx^2 + dx + a^2 = x^2 + 2x + 1 - cx^2 + dx + a^2 = (1-c)x^2 + (2+d)x + 1 + a^2$$

$$\begin{cases} 1-c=0 \Rightarrow c=1 \\ 2+d=0 \Rightarrow d=-2 \end{cases} \Rightarrow ad+bc = 2(-2) + 1 \times 1 = -4 + 1 = -3$$

چون g تابع ثابت است، داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۶

چون بازه $(0, \frac{1}{4})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y = 3x^2 + \frac{1}{4}x + c$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = \left| \frac{x}{|x|} + 2 \right|$ قرار دارد، پس به جای

 $|x|$ می‌توانیم بنویسیم x ، بنابراین داریم:

$$3x^2 + \frac{1}{4}x + c < \left| \frac{x}{|x|} + 2 \right| \Rightarrow 3x^2 + \frac{1}{4}x + c < 3 \Rightarrow 3x^2 + \frac{1}{4}x + c - 3 < 0$$

بنابراین $x = \frac{1}{4}$ یکی از ریشه‌های عبارت $3x^2 + \frac{1}{4}x + c - 3$ است:

$$3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + c - 3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + c - 3 = 0 \Rightarrow c = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۷

باید نامعادله $0 < \frac{1-3x}{x+1} < -2$ را حل کنیم:

$$1) -2 < \frac{1-3x}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{1-3x}{x+1} + 2 \Rightarrow 0 < \frac{3-x}{x+1} \Rightarrow -1 < x < 3$$

$$2) \frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow x < -1 \quad \text{یا} \quad x > \frac{1}{3}$$

اشتراک این بازه‌ها $\frac{1}{3} < x < 3$ است که شامل ۲ عدد طبیعی $x=1$ و $x=2$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۸

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(-3, n^2 - 2n)$ و $(-3, 1 - 2n^2)$ مولفه‌های دوم با هم برابر باشند:

$$1 - 2n^2 = n^2 - 2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow (n-1)(3n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

اکنون با جایگذاری $n=1$ و $n=-\frac{1}{3}$ ، رابطه f را بازنویسی می‌کنیم:

$$n=1: f = \{(-3, -1), (2, 1), (1, 2)\} \text{ تابع است.}$$

$$n=-\frac{1}{3}: f = \left\{(-3, \frac{7}{9}), (1, 2), (2, -\frac{1}{3}), (-3, 2)\right\} \text{ تابع نیست}$$

بنابراین تنها به ازای $n=1$ رابطه f نمایانگر یک تابع است و حاصل $f(2)$ برابر ۱ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۲۹

دامنه تابع f به صورت $D_f = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}\}$ و دامنه تابع g به صورت $D_g = \{3, \sqrt{2}, -3, \sqrt{5}, \sqrt{3}\}$ است که اشتراک آن‌ها برابر است با:

$$D_f \cap D_g = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$$

در ضمن چون $g(\sqrt{3}) = 0$ است، پس به ازای $x = \sqrt{3}$ مخرج کسر $\frac{f}{f \times g}$ برابر صفر است که تعریف نشده است، پس:

$$\frac{f}{f \times g} = \left\{ \left(\sqrt{2}, \frac{-2}{-2 \times -1} \right), \left(\sqrt{5}, \frac{1}{1 \times -3} \right) \right\} = \left\{ (\sqrt{2}, -1), \left(\sqrt{5}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$$

پس برد این تابع برابر مجموعه $\left\{ -1, \frac{-1}{3} \right\}$ که شامل یک عدد صحیح است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۰

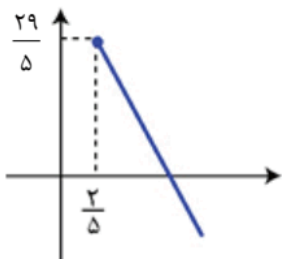
چون نقطه $A(-\frac{1}{14}, -\frac{1}{6})$ روی تابع وارون قرار دارد، پس نقطه $A'(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{14})$ روی خود تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ قرار دارد:

$$-\frac{1}{14} = \frac{-\frac{1}{6}}{a + a\left|-\frac{1}{6}\right|} \Rightarrow \frac{1}{14} = \frac{\frac{1}{6}}{a + \frac{1}{6}a} \Rightarrow \frac{1}{14} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}a} \Rightarrow \frac{1}{14} = \frac{1}{7a} \Rightarrow a = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۱

ابتدا ضابطه تابع را در ریشه‌های درون قدرمطلق باز می‌کنیم:



$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7, & x \leq -\frac{5}{2} \\ 7x + 3, & -\frac{5}{2} < x < \frac{2}{5} \\ -3x + 7, & x \geq \frac{2}{5} \end{cases}$$

ضابطه وارون تابع در بازه اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ است. در ضمن چون برد تابع f در این بازه برابر $y \leq \frac{29}{5}$ است، پس دامنه تابع f^{-1} در این بازه به صورت $x \leq \frac{29}{5}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

روش اول: ۲۳۲

$$y = 1 - \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-y = \sqrt{1-x}$$

$$y^2 - 2y + 1 = 1-x \Rightarrow x = 2y - y^2$$

$$f^{-1}(x) = 2x - x^2 \xrightarrow{x \leq 1} a = -1, b = 2 \Rightarrow ab = -2$$

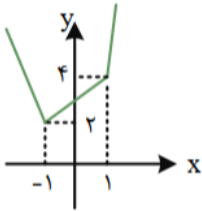
روش دوم:

می‌توانیم با انتخاب ۲ عدد مناسب از دامنه f ، a و b را بیابیم.

$$\begin{aligned} f(1) = 1 &\Rightarrow f^{-1}(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ f(-3) = -1 &\Rightarrow f^{-1}(-1) = -3 \Rightarrow a - b = -3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow ab = -2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۳ با رسم نمودار تابع f مشخص می‌شود، تابع در بازه $[-1, +\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل α برابر -1 است.



(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$4 - x > 0 \Rightarrow x < 4, \frac{1}{\sqrt{4-x}} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{4-x} \geq 4 \xrightarrow{4-x>0} 4-x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq \frac{15}{4}$$

$$D_f = \left[\frac{15}{4}, 4\right) \Rightarrow \alpha\beta = 15$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f \circ f(x) = \frac{f(x)}{2f(x)+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{2x}{2x+1}+1} = \frac{x}{4x+1}$$

$$f \circ f(x) = -2x \Rightarrow \frac{x}{4x+1} = -2x \Rightarrow \begin{cases} x=0, & A \\ 4x+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}, & B \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{array} \right|$$

$$AB = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{36}{64}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f\left(-\frac{\Delta}{3}\right) = \left[-\frac{\Delta}{3}\right] + \frac{\Delta}{3} \times 2 = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \text{gof}\left(-\frac{\Delta}{3}\right) = g\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\left[\frac{4}{3} + f\left(\frac{4}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[\frac{4}{3} + \left[\frac{4}{3}\right] - \frac{1}{3}\right]\right) = f\left(\left[1 - \frac{4}{3}\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3}\right]\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\left[-\frac{1}{3}\right]\right) = f(-1) = -1 + 2 = 1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$f(-1) = -1 \Rightarrow \frac{-a+b}{2} = -1 \Rightarrow b-a = -2$$

$$f(3) = 3 \Rightarrow \frac{3a+b}{6} = 3 \Rightarrow 3a+b = 18$$

$$\begin{cases} b-a = -2 \\ 3a+b = 18 \end{cases} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5, b = 3$$

$$f(x) = \frac{5x+3}{x+3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x+3}{x-5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(6) = \frac{-18+3}{1} = -15$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۴

۲۳۵

۲۳۶

۲۳۷

۲۳۸

$$f^{-1}\left(-\frac{9}{7}\right) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -\frac{9}{7}$$

$$2\alpha^2 - 8\alpha + \frac{7}{7} = 0 \Rightarrow (2\alpha - 7)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}\left(-\frac{9}{7}\right) = g^{-1}\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$g^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) = \beta \Rightarrow g(\beta) = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{5\beta - 3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \beta = 2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۹ $y = -1$ و $4x + y = 3$ ، پس $x = 1$ ، یعنی $A(1, -1)$ روی وارون تابع است و $A'(-1, 1)$ روی نمودار $y = f(x)$ خواهد بود، پس:

$$f(-1) = 1 \Rightarrow -1 + 2 - a + 6 = 1 \Rightarrow a = 6$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۰ ابتدا $f(\sqrt{3})$ را به دست آورده و آن را جایگزین می‌کنیم:

$$f(\sqrt{3}) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow f(2a) = 6$$

$$2a^2 - [2a] = 6$$

با توجه به گزینه‌های موجود $a = \sqrt{2}$ قابل قبول است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۱ تغییرات بیان شده را به ترتیب بر روی تابع f اثر می‌دهیم و داریم:

$$\sqrt{4x+16} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -\sqrt{-4x+16} \xrightarrow{\substack{6 \text{ واحد به بالا} \\ k \text{ واحد به چپ}}} 6 - \sqrt{-4(x+k)+16} = g(x)$$

حال تابع به دست آمده به ازاء $x = 0$ و $f(0)$ با هم برابرند، پس:

$$g(0) = 6 - \sqrt{16 - 4k}$$

$$f(0) = 4$$

$$\Rightarrow 6 - \sqrt{16 - 4k} = 4 \Rightarrow \sqrt{16 - 4k} = 2 \Rightarrow 16 - 4k = 4 \Rightarrow 4k = 12 \Rightarrow k = 3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)